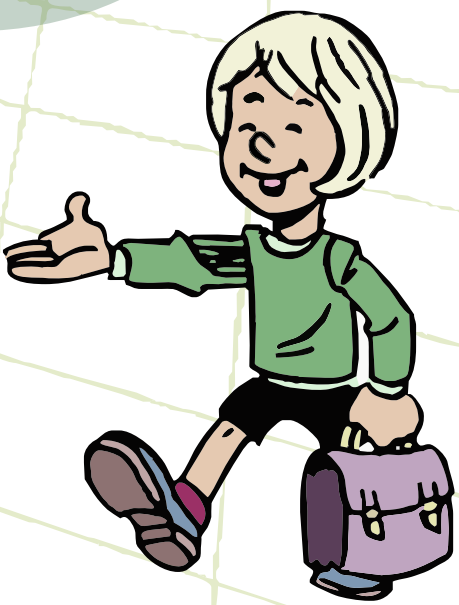
ILSA 100

Unterrichts-planung



Das LehrerInnenhandbuch 1. Auflage

Herausgeber:

ILSA Lernentwicklung
Hattinger Straße 246-248
44795 Bochum

www.ILSA-Lernentwicklung.de

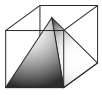
Info@ILSA-Lernentwicklung.de

Bussebaum@ILSA-Lernentwicklung.de

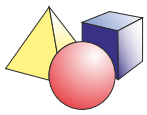
Hoffmann@ILSA-Lernentwicklung.de

Entwicklung:

MATHEMATISCH LERNTHERAPEUTISCHES ZENTRUM
Dortmund - Bochum - Lüdenscheid



Mathematisch Lerntherapeutisches Institut
Düsseldorf



Die Autoren von ILSA:
Christian Bussebaum (Kinder- und Jugendlichenpsychotherapeut, Integrativer Dyskalkulietherapeut FH)
Wolfgang Hoffmann (Ausbildungsleitung der ILSA Lernentwicklung, Integrativer Dyskalkulietherapeut FH)
Klaus Dieter Stemler † (Kinder- und Jugendlichenpsychotherapeut, Integrativer Dyskalkulietherapeut FH)

© by ILSA Lernentwicklung, 2021

Die Anwendung von ILSA ist ausschließlich Schulen und anderweitigen Einrichtungen vorbehalten, die vom MLZ, MLI und von diesen autorisierten Einrichtungen dafür lizensiert worden sind.

Inhalt

Vorwort und Einleitung 2

1 Material 4

2 Kopfzeile und Schwierigkeitsbewertungen 5

3 Allgemeiner Aufbau des Arbeitsheftes 7

4 Rechnen mit getrennten Stellenwerten 8
4.1 „Ich habe nicht untereinander gerechnet!“- oder vielleicht doch? 8
4.2 „Das fällt vielen Kindern leichter!“- nur eine Variante 9
4.3 Konsequenz Nr. 1: Keine adäquaten Zahlenraumvorstellungen 10
4.4 Konsequenz Nr. 2: Kopfrechenleistungen können nicht entwickelt werden 11
4.5 Den ersten Summanden bzw. den Minuenden NIEMALS nach Stellenwerten trennen! 12

5 Reihenfolge der Stellenwerte 13
5.1 Probleme bei den Aufgabentypen analytisch 1 mit Zehnerüberschreitungen 13
5.2 Bessere Passgenauigkeit zu den schriftlichen Algorithmen der Strichrechnungen 15

6 Teilschrittverfahren contra Flexibilität? 16

7 Der einstufige Rechenprozess (M 3.2) 18
7.1 Was ist das? 18
7.2 Der Unterschied zwischen „stufig“ und „schrittig“ 18
7.3 Lerninhalt und Lernziel 20
7.4 Kontrollaufgaben im ILSA-Screening 100 24

8 Der zweistufige Rechenprozess ohne Zehnerübergang (M 3.4) 25
8.1 Was ist das? 25
8.2 Lerninhalt und Lernziel 25
8.3 Kontrollaufgaben im ILSA-Screening 100 30

9 Der zweistufige Rechenprozess mit Zehnerübergang (M 3.5) 31
9.1 Was ist das? 31
9.2 Rechnen mit getrennten Stellenwerten mit Zehnerübergang 31
9.3 Lerninhalt und Lernziel 34
9.3.1 Herleitung des Übergangs aus dem Zahlenraum bis 20 (Partnerarbeit) 34
9.3.2 Erste Automatisierung: Rechnen nur mit dem 2. Summanden bzw. den Subtrahenden 35
9.3.3 Die Analogiebildung vom Zahlenraum bis 20 auf den Zahlenraum bis 100 35
9.3.4 Die Äquivalenzdarstellungen auf dem Rechenrahmen (Analogien zum ZR bis 20 im ZR 100) 36
9.3.5 Die verschiedenen Trainingseinheiten zur Automatisierung auf symbolischer Ebene 37
9.4 Fit für das Einmaleins 37
9.5 Kontrollaufgaben im ILSA-Screening 100 40

10 Der dreistufige Rechenprozess mit Zehnerübergang (M 3.6) 41
10.1 Was ist das? 41
10.2 Lerninhalt und Lernziel 42
10.3 Automatisierungsschritte 42
10.4 Kontrollaufgaben im ILSA-Screening 100 43

11 Anhang: Die 1x1-Tafeln .....

Die Mathekönig_in .....

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

das dritte Schüler-Arbeitsheft in 2 Bänden liegt vor Ihnen und vervollständigt das Unterrichtskonzept ILSA mit den Themen Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100.

Bereits mit ILSA 1, das sich mit dem Zahlenraum bis 10 beschäftigt, haben wir neue Wege beschritten, was den Verlauf des Rechnenlernens angeht. Diesbezüglich sind wir uns treu geblieben, denn ILSA SWS führt das dekadische Positionssystem und den Zahlenraum bis 100 bereits in der Klasse 1 ein und verlässt damit die Linie, den Kindern einen mehr oder weniger „künstlichen" Zahlenraum von 0 bis 20 anzubieten. ILSA 100 baut folgerichtig auf ILSA SWS auf und erweitert das Rechnen bis 100 in aufeinander abgestimmter Reihenfolge. Dabei verschieben wir den Zehnerübergang, der von allen Rechnungen im Zahlenraum bis 100 der schwierigste ist, deutlich nach hinten. Wir reagieren damit auf die großen Probleme, die die allermeisten Kinder mit dem Zahlenraum bis 20 haben, wenn es gegen Ende der Klasse 1 um das zehnerüber- und unterschreitende Rechnen geht.

Mit ILSA 100 werden zunächst einstufige Rechenprozesse eingeführt. Dies geschieht in Analogie zum Zahlenraum bis 10. Das Phänomen, dass Kinder nach dem nichtzählenden Rechnen im Zahlenraum bis 10 beim Rechnen bis 100 wieder in Zählstrategien „zurück"fallen, liegt zum einen an dem Mangel, dass es keine ausführliche Befassung mit dem Stellenwertsystem gibt und zum anderen daran, dass Analogien zum Zahlenraum bis 10 nur ansatzweise vorgestellt und verstanden werden. Dies wollen wir im ersten Teil mit den einstufigen Rechenprozessen beheben.

Es folgen die zweistufigen Rechenprozesse. Ein völlig neuer Lerngegenstand tut sich auf. Eine Rechenaufgabe kann nicht mehr in einem einzigen Rechenschritt gelöst werden. Das müssen die Kinder erst einmal begreifen und automatisieren. Dabei ist es sinnvoll, dass man die Schwierigkeiten des Zehnerübergangs erst einmal herauslässt. Dieser ist ein separater Lernschritt und gehört hier noch nicht hin. „Was soll ich noch 'mal rechnen?" Dieses Problem gilt es zu lösen. Der Lerngegenstand heißt: Merken von Zwischenschritten!

Im Band 2 sind dann zweistufige Rechenprozesse mit Zehnerübergängen zentrales Thema. Dieser Lerngegenstand kommt dann, wenn die Kinder schon einige Rechenaufgaben im Zahlenraum bis 100 beherrschen und sich auch Zwischenergebnisse merken können. Ohne diese profunden Grundkenntnisse führt das mit den zehnerüberschreitenden Rechnungen bei den allermeisten Kindern zu großen Problemen. Genau das soll mit ILSA 100 nicht passieren.

Danach sind die Kinder bereit, das Einmaleins zu erlernen. Also erst dann, wenn das Rechnen mit Zehnerübergängen als zweistufige Prozesse (z. B. 35 + 7) nahezu tadellos funktioniert. Ohne diese Rechenverfahren gelingt das Erlernen des Multiplizierens mit Hilfe der Kernaufgaben nicht; das Distributivgesetz als eines der zentralsten Gesetze der Mathematik kann nicht angewandt werden- mit fatalen Folgen für das verständige Erlernen des Einmaleins. Alles verharrt im stupiden Auswendiglernen von Reihen, die von vielen Kindern immer wieder vergessen werden.

Es folgt die Königsdisziplin: Dreistufige Rechenprozesse mit Zehnerübergang. Ob man sie auch noch vor dem Erlernen des Einmaleins zum Thema macht, oder danach, können Sie an Ihren Unterrichtsverlauf anpassen. Diese Rechenprozesse vollständig im Kopf zu lösen bleibt bei unseren Lerntherapien den Kindern vorbehalten, die über eine durchschnittliche bis gute Auffassungsgabe verfügen. Kindern, die man eher als lernschwach einschätzt, haben weiter die Möglichkeit, sich zumindest einen Zwischenschritt zu notieren.

Mit den beiden Bänden des Arbeitsheftes 3 möchten wir einen neuen Zugang zum Rechnen im Zahlenraum bis 100 eröffnen. Das bedeutet aber auch, dass der Zahlenraum bis 10 VORHER zählfrei in all seinen Facetten beherrscht werden muss. Und ohne die Kenntnis des Stellenwertsystems geht beim Rechnen mit zweistelligen Zahlen schon gar nichts. ILSA SWS ist also eine weitere wichtige grundlegende Voraussetzung für die Arbeitshefte ILSA 100.

Manche mögen bei ILSA 100 alternative Rechenwege vermissen- besonders bei der Zehnerüberschreitung. Wir setzen hier ganz bewusst auf einen Rechenweg: Das Teilschrittverfahren. Es ist uns durchaus klar, dass sich bei manchen Aufgaben ökonomischere Strategien anbieten. Aber Kinder sofort mit 3 oder gleich 4 verschiedenen Rechenwegen zu konfrontieren, wenn sie gerade einmal dabei sind, den Zehnerübergang ganz neu zu erlernen, halten wir für keine Flexibilisierungsmaßnahme, sondern für eine Überforderungssituation. Die Kinder entdecken meist völlig allein ökonomischere Wege, wenn sie erst einmal nach der dekadischen Grundstruktur das Rechnen erlernt haben. Umgekehrt geht das nie!

Das mag dem einen oder anderen als „rückwärtsgewandt“ erscheinen, als „nicht innovativ“ oder „altmodisch“. Zu bedenken geben möchten wir aber: Es ist auch ziemlich „altmodisch“, dass es Einer, Zehner und Hunderter gibt, dass sich alle Rechnungen auf den Zahlenraum bis 10 beschränken, sich der Rest durch Analogien ergibt und das 5 + 3 seit ziemlich langer Zeit 8 ergibt. Von daher trifft uns dieser Einwand nicht und erst recht nicht, wenn Ihre Kinder später verständig im Zahlenraum bis 100 addieren und subtrahieren können. Das mag vielleicht auch etwas „altmodisch“ sein, macht aber Spaß!

Viel Erfolg beim Lernen mit ILSA 100.

Wir bedanken uns nochmals ausdrücklich für die Hilfen und konstruktiven Kritiken bei ...

Daniela Keppeler
Kirsten Jares

Soest

Uta Nowok

Dorsten

Astrid Kurella
Tanja Wurring

Duisburg

Original

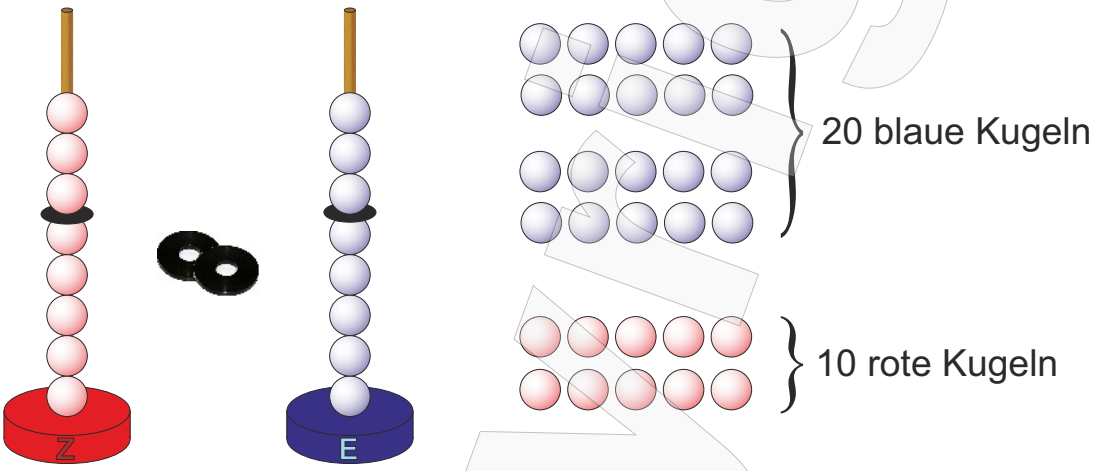
Für die Arbeit mit ILSA 100 und den beiden Bänden des Arbeitsheftes 3 empfehlen wir die folgenden Anschauungsmaterialien auf enaktiver Ebene ...

a) ... für die Anwendungsaufgaben:

Spielgeld (ausschließlich EURO)

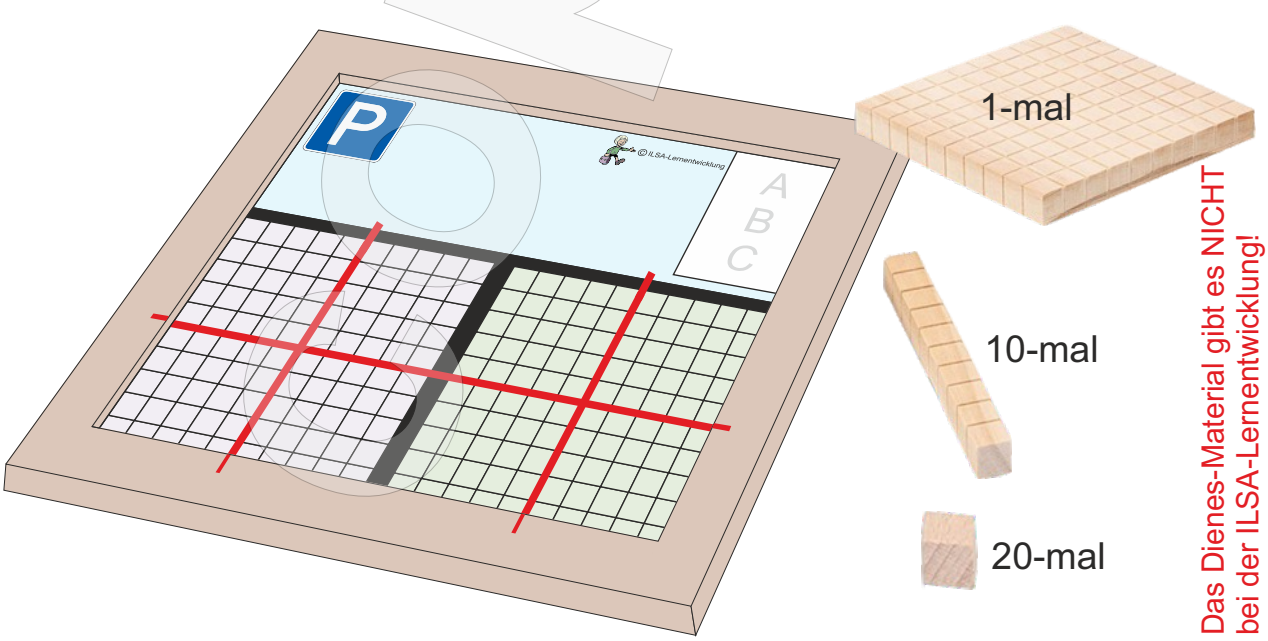
b) ... bei einigen Lehrkräften bei zehnerüberschreitenden Aufgaben beliebter als das Dienes-Material:

Kugelset (zu beziehen bei der ILSA-Lernentwicklung)



c) ... für nahezu alle vorgestellten Rechenoperationen:

ILSA-Rechenrahmen (am besten für jedes Kind)- zu beziehen bei der ILSA-Lernentwicklung



Das Dienes-Material gibt es NICHT bei der ILSA-Lernentwicklung!

Jede Seite im Arbeitsheft hat eine Kopfzeile in der die wichtigsten Informationen zur Übung stehen. Hier jeweils ein Beispiel mit den verschiedenen Farben:

Übungen 1/1: Das Geld ▷ Typ: EURO ▷ Stellenwerte ▷ Dekadischer Zahlaufbau M 3.1

Übungen 4/1: Einstufig ▷ Typ: Kernbilder ▷ Addition (syn, ana1&2) ▷ E-Stelle M 3.2.1

Übungen 5/1: Einstufig ▷ Typ: Kernbilder ▷ Addition/Subtraktion (syn, ana1&2) ▷ E-Stelle M 3.2.1

Die verschiedenen Farben symbolisieren die verschiedenen Schwierigkeitsgrade der Aufgaben (ähnlich wie manche es vom Skifahren oder von Wanderführern kennen):

Falls Sie (aus welchen Gründen auch immer) einmal eine Übung kopieren möchten und nicht jede Schule über Farbkopierer verfügt, sind die Schwierigkeiten wie oben dargestellt mit Monden zusätzlich angegeben.

Bei manchen einzelnen Aufgabenstellungen innerhalb einer Übung finden Sie auch unseren Rechen-Fuchs.

Für Mathe-Füchse

Die so markierten Aufgaben auf dieser Seite weichen vom Schwierigkeitsgrad der restlichen Aufgaben ab- sind also ein wenig „kniffeliger“. Haben Sie Kinder, bei denen Sie annehmen, dass sie die Übung beherrschen, können Sie sie auffordern: „Versucht auch mal die Aufgaben für Mathe-Füchse!“

Die graue Farbe steht für KEINE Schwierigkeit. Das sieht man bei den beiden nächsten Beispielen: Einmal sind es drei Monde (=schwierig) und einmal nur einer (=einfach).

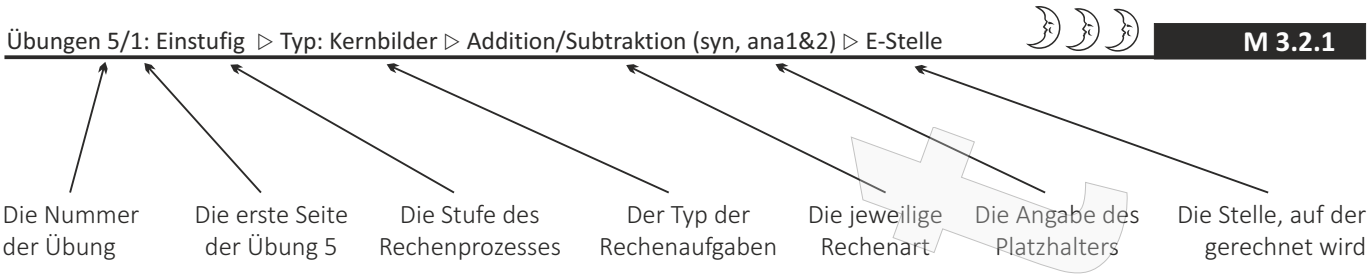
Übungen 11/2: Sachaufgaben ▷ Typ: Kernbilder ▷ Addition/Subtraktion ▷ Z- und E-Stelle im Wechsel M 3.2.1

M 3.2.1 Übungen - 2/1: Einstufig ▷ Typ: Kernbilder ▷ Addition/Subtraktion ▷ E-Stelle

Die graue Farbe symbolisiert, dass diese Übung mit den Kindern im Unterricht gemeinsam erarbeitet werden soll. Dafür steht dann auch die Glühbirne für’s Verständnis.

Unterrichtsstunde

Weitere Informationen in der Kopfzeile sind:



M 3.2.1 ← Die Modulnummer aus dem Inhaltsverzeichnis

Sollte es einmal zusätzliches Material zu den einzelnen Übungen geben, werden diese dann fortlaufend zum vorliegenden Arbeitsheft weiter durchnummeriert.

Gibt es z. B. zur Übung 5 die Seiten 1 und 2 (also Übung 5/1 und 5/2) dann heißen die Zusatzübungen Übung 5/3 und 5/4 usw. Das kennen Sie schon aus unseren vorangegangenen Arbeitsheften.

Auf einzelne Übungen gehen wir nachfolgend (soweit nötig und nicht selbsterklärend) ein.

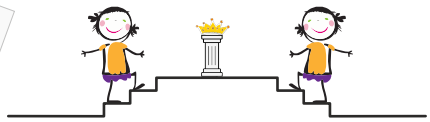
copyright

Nachfolgend ein grob strukturierter Überblick über den Aufbau von ILSA 100:

Band 1 - 72 Seiten

Band 2 - 80 Seiten

Modul 3.2
Einstufige Rechenprozesse



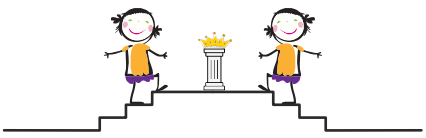
Modul 3.5
Zweistufige Rechenprozesse

mit

Zehnerübergang

Modul 3.4
Zweistufige Rechenprozesse

ohne
Zehnerübergang



Modul 3.6
Dreistufige Rechenprozesse

mit

Zehnerübergang

4 Rechnen mit getrennten Stellenwerten

Das findet man in Mathe-Büchern immer wieder und ist auch bei Eltern zu Hause sehr beliebt: „Rechne einfach Zehner plus Zehner und Einer plus Einer! Das geht dann einfacher!“: das Rechnen nach getrennten Stellenwerten. Aber auch in so manchen Übungsheften findet man diese Trennungen nach den einzelnen Stellenwerten, wenn es um das Rechnen (gleichgültig ob Addition oder Subtraktion) mit zweistelligen Zahlen geht. Und auch in einigen Schulen lautet das Argument ähnlich wie bei den Eltern: „Das fällt den Kindern nicht so schwer!“ Dagegen sprechen unseres Erachtens einige sehr bedeutsame Gründe:

4.1 „Ich habe nicht untereinander gerechnet!“ - oder vielleicht doch?

Bereits zu Beginn der Schulzeit aber spätestens bei ersten Rechenoperationen im Zahlenraum bis 100 bekommen Eltern von Lehrer_Innen den gut gemeinten Ratschlag, den Kindern auf keinen Fall die schriftlichen Rechenalgorithmen beizubringen, bevor dies nicht Thema des Unterrichts Mitte Klasse 3 ist. Es geht hier gar nicht darum, dass Eltern dem Curriculum vorgreifen, sondern um einen wesentlich wichtigeren Punkt.

Hat man es zu Hause (oder auch in der Klasse) mit einem zählenden Rechner zu tun, dann wird die Sache mit den Hausaufgaben spätestens beim Addieren und Subtrahieren im Zahlenraum bis 100 außerordentlich schwierig. Zwei Phänomene beobachtet man dabei nahezu immer:

a) Die Rechenzeiten (besser gesagt Abzählzeiten) verlängern sich auf ein nicht mehr akzeptables Maß (nebenbei bemerkt ist das Zählen bis 10 schon nicht mehr akzeptabel) und

b) die Fehlerquote steigt bedenklich bis dahin an, dass es zu gar keinen Lösungen mehr kommt, weil das Kind vergessen hat, wie die Aufgabenstellung hieß oder wo es gerade bei seinem Zählakt angekommen war.

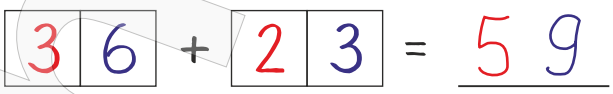
Beide Phänomene sind keineswegs verwunderlich, denn selbst Aufgaben ohne Zehnerüberschreitungen wie 58- 26 arten zu einer umfassenden Prüfung der Konzentrationsleistung des Kindes aus, wenn sie in Einer-Schritten heruntergezählt werden müssen. Zudem muss das Kind mitzählen, ob es schon 26 Zahlen abwärts gezählt hat- es zählt also doppelt! Das ergibt dann Hausaufgabenzeiten von weit mehr als einer Stunde- und das nur für Mathe. Zudem wird das Aufmerksamkeitspotential des Kindes schnell verbraucht, was zusätzlich für weitere Fehler sorgt und den Zeitaufwand weiter vergrößert. Was machen als Eltern, wenn dann irgendwann auch noch die Tränen fließen?

„Ich zeig’ dir ‘mal einen Trick!“, scheint der einzige Ausweg aus dem Dilemma zu sein. Und weil man sich an den Ratschlag der Schule halten möchte, nicht bereits zu Anfang bei ersten Schwierigkeiten im Zahlenraum bis 100 zu den schriftlichen Rechenverfahren zu greifen, versucht man es mit den bereits oben beschriebenen Verfahrenstechnicken: „Rechne einfach Zehner plus Zehner und Einer plus Einer! Das geht dann einfacher!“- und vor allen Dingen schneller.

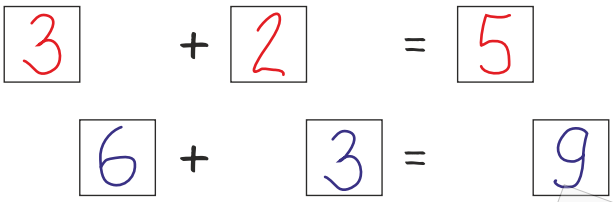
Betrachten wir nun die Addition 36 + 23 (vorausgesetzt ist, dass das Kind- ob rein schematisch oder nicht spielt keine Rolle- Zehner und Einer einer Zahl identifizieren kann). Das vorgeschlagene Vorgehen sieht nun so aus und gleicht dem schriftlichen Verfahren bis auf den Unterschied, dass die Zahlen nicht untereinander, sondern nebeneinander stehen und zuerst die Zehner und nicht die Einer durchgezählt werden, was die Eltern beruhigt, weil sie sich an den Ratschlag der Schule („nicht untereinander rechnen“) gehalten haben:

Nebeneinander

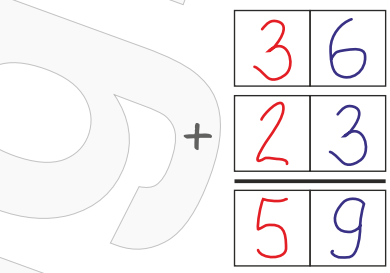
Untereinander



Rechenalgorithmus



Rechenalgorithmus



Ein solches Vorgehen löst aber keinerlei Probleme. Im Gegenteil: Alles, was hier geleistet wurde besteht darin, dass die Kinder wieder mit ihren Zählstrategien zurechtkommen. Natürlich nicht so schnell wie diejenigen Kinder, die rechnen können, aber: „Immerhin“, denkt sich die entlastete Mutter, „das Ergebnis passt und die Hausaufgaben wurden gemacht und verstanden!“ Von wegen! Die beträchtlichen Konsequenzen aus diesem Irrtum, beschreiben wir weiter unten.

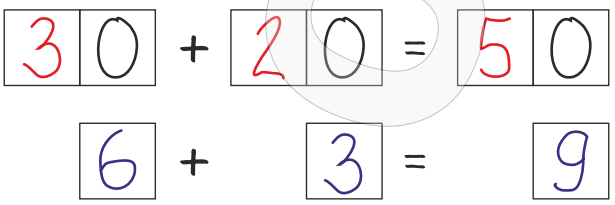
4.2 „Das fällt vielen Kindern leichter!“ - nur eine Variante

Die Kinder kommen nicht klar, also muss ein Schema für Abhilfe sorgen, genauer gesagt für Abzählhilfen. Der Unterschied ist in der Tat marginal, aber wie oben stimmen „wenigstens“ die Ergebnisse:

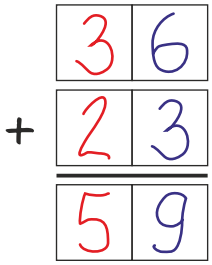
Nebeneinander

Untereinander

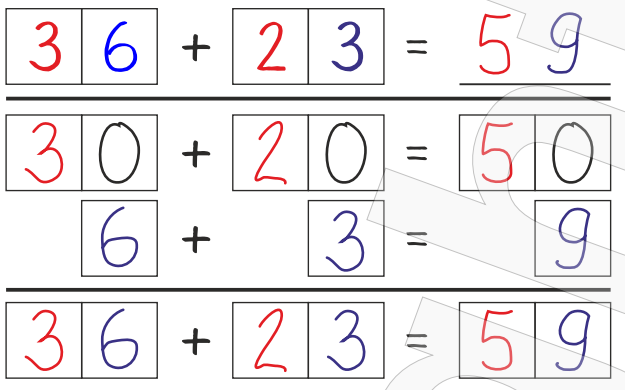
Rechenalgorithmus



Rechenalgorithmus



Ob das Kind nun wie am Küchentisch in Einer-Schritten die Zehner-Stelle abzählt oder im Unterricht in Zehner-Schritten, macht keinerlei Unterschied aus. Zudem wähnt man sich häufig auf der „sicheren Seite“, weil man solche Übungen auch in entsprechenden Arbeitsblattsammlungen, Übungsheften und Mathebüchern findet. Das sieht dann so aus und muss dann doch in Ordnung sein- oder etwa nicht?



Nur formal ein wenig anders notiert. Ansonsten keinerlei Unterschiede!

4.3 Konsequenz Nr. 1: Keine adäquaten Zahlenraumvorstellungen

Natürlich spielen sich alle Rechenoperationen als Zahlgleichungen lediglich im Zahlenraum bis 10 ab- alles andere sind Analogien. Lässt man aber die intensive Beschäftigung mit dem Stellenwertsystem aus (siehe hierzu auch ILSA SWS) und rechnet rein schematisch nach getrennten Stellenwerten, dann bleiben die Kinder in der Vorstellungswelt im Zahlenraum bis 10 verhaftet (auch wenn sie statt „1, 2, 3, 4, ...“ „10, 20, 30, 40, ...“ zählen- es handelt sich in den meisten Fällen jeweils um leere Worthülsen).

Sie wissen dann nicht, mit welchen Anzahlen sie tatsächlich rechnen. Entsprechend können sie keine Überschläge berechnen und erkennen keine falschen Ergebnisse. Das gilt sowohl für die Strategien unter 4.1 sowie auch unter 4.2. Besonders bei Zehnerübergängen geht oft gar nichts mehr!

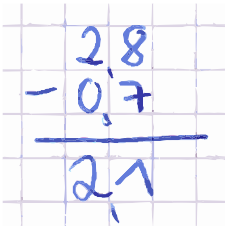
Zwei von hunderten von Beispielen aus der Subtraktion:

Aufgabe	Fehlerquelle(n)	Algorithmus
100 - 69 = 41	Stellenwertsystem getrennte Stellenwerte	100 - 60 = 40 10 - 9 = 1
82 - 58 = 361	Stellenwertsystem Tauschaufgabe bei Sub. getrennte Stellenwerte	8 - 5 = 3 2 - 8 = ? (*”geht nicht”*) 8 - 2 = 6

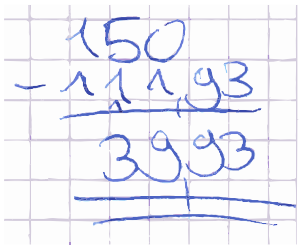
4.4 Konsequenz Nr. 2: Kopfrechenleistungen können nicht entwickelt werden

Das unter 4.1 und 4.2 beschriebene Verfahren ist nicht dazu geeignet, Kopfrechenleistungen beim Kind zu installieren. Im weiteren Verlauf wird nahezu alles untereinander gerechnet- auch völlig unsinnige Rechnungen (im weiteren Schulverlauf häufig zu beobachten).

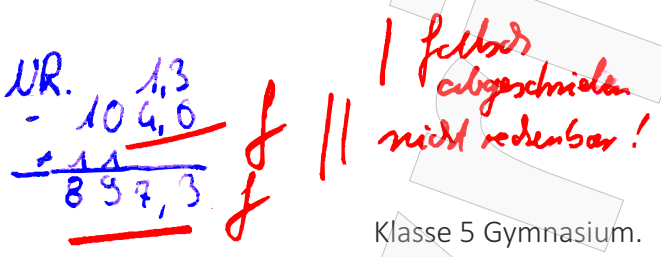
Beispiele:



Ergebnis aus der 8. Klasse im Gymnasium: Das Kind erkennt nicht, dass das schriftliche Verfahren keinerlei Vorteil bringt!



Die schriftlichen Algorithmen sorgen für schematisches Rechnen. Fehler werden nicht erkannt (ebenfalls Klasse 8 Gymnasium).



Klasse 5 Gymnasium.

Schematisches Rechnen: Auch unlösbare Aufgaben (in der Menge der natürlichen Zahlen) werden „gelöst“. Und wieder: Offensichtlich falsche Ergebnisse werden nicht erkannt.

Beide Verfahren, die wir in 4.1 und 4.2 skizziert haben, trennen sowohl den ersten als auch den zweiten Summanden. Das fordert die Frage „Was sollte ich noch ‘mal rechnen?“ förmlich heraus! Schauen wir unser Beispiel genauer an. Welche Merkleistungen sind beim Kopfrechnen erforderlich, wenn man beide Zahlen nach den Stellenwerten trennt?[1]

Aufgabe		Algorithmus	Gedächtnisleistung
36 + 23 =			
30 + 20 = 50	1	Das Kind addiert die Zehner	Das Kind muss sich beide Ziffern der Einer-Stellen merken (6 **und** 3)! Das Kind muss das Zwischenergebnis 5 0 abspeichern.
6 + 3 = 9	2	Das Kind addiert die Einer	Das Kind muss die 6 **und** die 3 aus dem Kurzzeitgedächtnis abrufen. Es muss dann die 9 im Kurzzeitgedächtnis ablegen.
50 + 9 = 59	3	Das Kind addiert beide Zwischenergebnisse	Das Kind muss **beide** Zwischenergebnisse (50 und 9) aus dem Kurzzeitgedächtnis abrufen.

[1] Natürlich sieht das Kind beim Kopfrechnen die Aufgabenstellung nicht!

Ohne hier weitere Beispiele zu bringen, kann man sich leicht vorstellen, dass das bei Aufgaben mit Zehnerüberschreitung und Aufgaben mit dreistelligen Zahlen deutlich dramatischer wird. Da geht dann im Kopf nahezu gar nichts mehr (oder nur bei ihren Mathe-Assen- und die rechnen das ohnehin anders).

4.5 Den ersten Summanden bzw. den Minuenden **NIEMALS** nach Stellenwerten trennen!

Das ist die logische Schlussfolgerung aus dem bisher dargestellten Algorithmen und Überlegungen und findet in diesem Arbeitsheft natürlich durchgehend Berücksichtigung! „Das fällt den Kindern doch leichter!“ stimmt nur dann, wenn die Kinder die Aufgabe verschriftlichen (und natürlich die Aufgabenstellung visuell vor sich liegen haben), da dann die Gedächtnisleistungen deutlich geringfügiger ausfallen. Das Kopfrechnen gelingt auch nicht mit viel Übung, weil es für das Kurzzeitgedächtnis schlicht und einfach zu viel ist. Wenn Sie es selbst mit getrennten Stellenwerten bei der Addition von zwei dreistelligen Zahlen versuchen (auch ohne Stellenwertübergänge), werden sie feststellen, dass sie enorme Gedächtnisleistungen erbringen müssen.

Und genau das ist aber gar nicht nötig! Wie wird im Arbeitsheft 3 ILSA 100 verfahren und wie sehen hier die Gedächtnis- und Merkleistungen im Vergleich zur Vorgehensweise nach getrennten Stellenwerten aus?

Aufgabe	Algorithmus	Gedächtnisleistung
36 + 23 = ____		
36 + 03 = 39	1 Das Kind addiert die 3 Einer	Das Kind muss sich **nur** die 2 Zehner des zweiten Summanden merken! Das Kind muss sich **kein** Zwischenergebnis merken, sondern rechnet mit der 39 weiter.
39 + 20 = 59	2 Das Kind addiert die Zehner	Das Kind muss die 2 Zehner aus dem Kurzzeitgedächtnis abrufen.
Schritt 3 entfällt vollständig!		
50 + 09 = 59	3 Das Kind addiert ~~beide Zwischenergebnisse~~	~~Das Kind muss **beide** Zwischenergebnisse (50 und 9) aus dem Kurzzeitgedächtnis abrufen.~~

Wir denken, dass der Vergleich mehr als eindeutig ausfällt!

Scan

5 Reihenfolge der Stellenwerte

Das ist ein heiß diskutiertes Thema- und das war es auch bei uns. Von den Gedächtnisleistungen (wie unter Punkt 3.4 und 3.5 erläutert) hängt die Frage, ob man zunächst die Einer oder die Zehner addieren/subtrahieren sollte, gar nicht ab. Das ist für die Fragestellung völlig gleichgültig.

Trotzdem haben wir uns in ILSA 100 entschieden, dass zuerst die Einer „verarbeitet" werden (egal ob mit oder ohne Zehnerüberschreitungen). Das soll nicht als Dogma verstanden werden. In späteren Automatisierungsphasen und bei der Entwicklung flexibler Rechenstrategien (also nach den im Arbeitsheft 3 erlernten Grundzügen des Teilschrittverfahrens- dazu später noch mehr) können die Kinder nach Belieben die Reihenfolge auch umkehren.

5.1 Probleme bei den Aufgabentypen analytisch 1 mit Zehnerüberschreitungen

Das ist unseres Erachtens der zwingenste Grund dafür, dass man den Kindern beibringt, zunächst die Einer zu addieren bzw. zu subtrahieren. Warum?

Beginnen wir mit einem Beispiel aus höheren Klassenstufen (dort wird es besonders deutlich):

Das Problem (jedenfalls bei Schülern in der Sek I) ist häufig nicht die Berechnung der Minuten, sondern die Reihenfolge, in der die Flugzeit ausgerechnet wird. Die Aufgabenstellung lautet ausgeschrieben:

16 h 56 min + ___h__min = 21 h 11 min

Die Reihenfolge der Uhrzeiten (zuerst die Stunden, dann die Minuten) verleitet die Kinder sehr häufig dazu, zunächst die Stunden aufzufüllen:

16 h + __h = 21 h
16 h + 5 h = 21 h

Selbst wenn jetzt die Berechnung der Minuten mit 15 korrekt erfolgt, ist das Ergebnis dennoch falsch:

16 h 56 min + 5 h 15 min = 21 h 11 min

Dafür sind 2 Ursachen zu analysieren: Die eine wurde im Kapitel 4 beschrieben (Rechnen nach getrennten Stellenwerten- hier Stunden und Minuten) und die andere ist die Rechen-Reihenfolge (die Stunden werden zuerst berechnet/ergänzt). Dadurch „verwischt" der Übergang in die nachfolgende Stunde.

Die „Beliebtheit“ dieses Fehlers ist keineswegs zu unterschätzen und kommt auch beim Rechnen mit Geldbeträgen vor (Berechnung des Rückgeldes):

Bezahlt mit …

Berechne das Rückgeld!

Die Aufgabe lautet dann (als Auffüllaufgabe) auf symbolischer Ebene notiert:

$$27\ € + \_\_\_\ € = 50\ €$$

Wie beim Rechnen mit Zeitspannen auch, kommt es zu den bereits beschriebenen fehlerträchtigen Vorgehen:

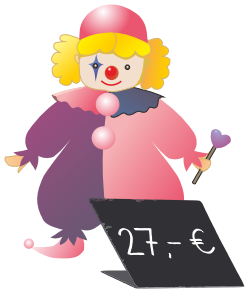
- Die Stellenwerte der ersten Zahl werden getrennt und
- das Ergänzen beginnt mit der Zehnerstelle:

$$20\ € + 30\ € = 50\ €$$

- Und dann die Einer-Stelle als Ergänzen zum vollen Zehner:

$$7\ € + 3\ € = 10\ €$$

Das Rückgeld sieht nun so aus:



Bezahlt mit …

Berechne das Rückgeld!

Es galt, diesen Fehleralgorithmus einzudämmen. Und das gelingt dadurch, indem man sich rechnerisch zuerst der Einer-Stelle widmet, wie dieses Beispiel aus dem Arbeitsheft ILSA 100 zeigt:

Beispiel

2	6	+	2	4	=	5	0

Addiere zuerst die Einer! **1**

Dann addiere die Zehner! **2**

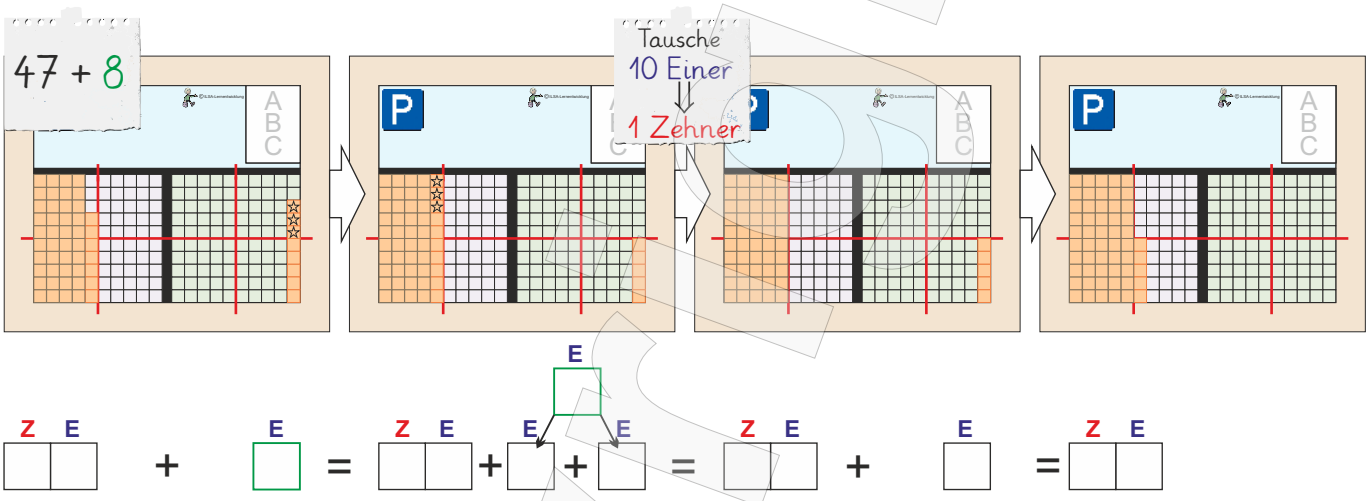
2	6	+		4	=	3	0
3	0	+	2	0	=	5	0

In den lang vergangenen Zeiten der „Tante-Emma-Läden“ bekam man exakt so von der Kassiererin sein Rückgeld vorgerechnet: Zuerst das Ergänzen der Einer zum vollen Zehner und dann die restlichen Zehner-Scheine. Bei den heutigen Kassen entfällt dies komplett - ein Segen für die KassiererIn? Das mag jeder selbst entscheiden!

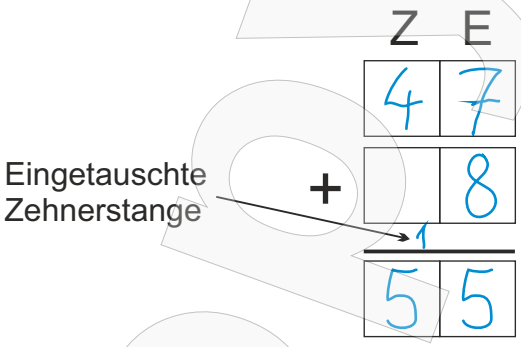
5.2 Bessere Passgenauigkeit zu den schriftlichen Algorithmen der Strichrechnungen

Das ist zwar ein ziemlich nachgeordneter Grund, der einem gewissermaßen als „Abfallprodukt“ in den Schoß fällt. Bei der Einführung der schriftlichen Rechenalgorithmen beginnt man sowohl bei der Addition als auch bei der Subtraktion das Rechnen auf der Einer-Stelle (ob nun nach dem Ergänzungsverfahren oder dem Abziehverfahren spielt dabei keine Rolle).

Sind die Kinder es zwischenzeitlich gewohnt, immer bei den Einern zu beginnen, kann man sich bei der Einführung dieser Verfahren „lange Vorträge“ ersparen. Zudem lässt die vorherige Beschäftigung mit den Tauschprozessen im Arbeitsheft ILSA-SWS das Erscheinen der „kleinen Einsen“ leicht erklären. Diese Tauschprozesse tauchen auch im vorliegenden Arbeitsheft nochmals auf:



Als schriftlicher Algorithmus aus Klasse 3 auf symbolischer Ebene formuliert:



Insgesamt ist Punkt 5.2 kein entscheidendes Argument, sondern rangiert eher unter „Mitnahmeeffekt“. Der macht sich dann aber doch positiv bemerkbar.

6 Teilschrittverfahren contra Flexibiliät beim Rechnen?

Frage Nr. 1

Wie würden Sie die Aufgabe ...

$$56 + 29 = \_\_\_\_$$

... lösen?

Wir denken, das ist völlig unstrittig: $56 + 29 = 56 + 30 - 1 = 86 - 1 = \underline{85}$

Frage Nr. 2

Und jetzt einmal „Hand auf's Herz": Wie oft haben sie schon bei diesem Vorschlag in völlig ratlose Kinderaugen geschaut?

Garantiert nicht so oft, wie wir bei „unseren" Kindern in den Therapie-Einrichtungen. Sie haben ja wenigstens noch ihre Mathe-Asse und einige Kinder, die dieses Vorgehen zwar nicht auf Anhieb, aber immerhin nach einigen Anläufen verstehen. Die Mehrzahl der Klasse wird das aber nicht sein, jedenfalls dann nicht, wenn man nahezu gleichzeitig mit vier verschiedenen Algorithmen aufwartet, um diese oder jene Aufgabe auszurechnen. Die Kinder haben schon damit gut zu tun, dass in unseren Arbeitsheften häufig die Rechenarten wechseln und auch die Sorte der Aufgaben (synthetische oder analytische Fragestellungen). Das bedeutet: Die Kinder müssen sich ständig neu auf die Aufgabentypen einstellen; sie müssen Tausch- oder auch Umkehraufgaben anwenden- das sollte für den Einstieg an Flexibilität doch erst einmal ausreichen- oder vielleicht nicht?

Einige Mathebücher sehen das ganz anders: Während man im ersten Schuljahr in dem „künstlich geschaffenen „Zahlenraum von 0 bis 20" alles versucht, um Zehnerübergängen beim zehnerüberschreitenden Rechnen „aus dem Weg zu gehen" (man weiß ja schließlich, wo es Probleme gibt), ...

Dopplungen +/- 1	$8 + 7 = 8 + 8 - 1 = 16 - 1 = 15$
Dopplungen +/- 2	$8 + 6 = 6 + 6 + 2 = 12 + 2 = 14$
5er-Zerlegungen	$6 + 7 = 5 + 5 + 1 + 2 = 10 + 3 = 13$
Nähe zur 10	$7 + 9 = 7 + 10 - 1 = 17 - 1 = 16$

... kommt im Mathebuch für die Klasse 2 ziemlich schnell die Kapitulationserklärung: Die so „flexibel erarbeiteten" Rechenstrategien im Zahlenraum bis 20 funktionieren (bis auf die Nähe zum nächsten vollen Zehner- siehe auch oben) im Zahlenraum bis 100 nicht mehr! Nicht nur, dass kaum ein Kind sie in Klasse 1 verstanden hat, kommt jetzt noch hinzu, dass sie für den Zahlenraum bis 100 nicht anwendbar sind (oder nur als völlig unökonomische Rechenstrategien, die selbst Mathe-Asse aus gutem Grund verweigern).

Wie in unseren regelmäßig stattfindenden Webinaren[1] schon mehrfach dargelegt (ILSA SWS), kommt es bei der Übertragung dieser Algorithmen zu chaotischen Rechenwegen - ganz besonders dann, wenn es zweistellig wird:

Dopplungen +/- 1 $68 + 27 = 68 + 28 - 1 = 60 + 20 + 16 - 1 = 96 - 1 = 95$

Dopplungen +/- 2 $48 + 16 = 46 + 16 + 2 = 40 + 10 + 12 + 2 = 62 + 2 = 64$

5er-Zerlegungen $46 + 37 = 40 + 30 + 5 + 5 + 1 + 2 = 70 + 10 + 3 = 83$

Haben Sie noch nie in einem Mathebuch gesehen? Stimmt haargenau- wir auch nicht! Und warum werden sie dann in Klasse 1 eingeführt, wenn man sie dann hinterher „völlig vergessen" kann, weil sie schlicht und einfach nicht praktikabel sind? Offensichtlicherweise möchte man auf „Teufel komm' raus" Aufgaben mit Zehnerüberschreitungen in Klasse 1 unterbringen, ohne zuvor mit Kindern zweistellige Zahlen und damit die Logik des Stellenwertsystems erarbeitet zu haben.

Übrig bleiben dann:

Nähe zum vollen Zehner $37 + 19 = 37 + 20 - 1 = 57 - 1 = 56$

Teilschrittverfahren $48 + 25 = 48 + 2 + 3 + 20 = 53 + 20 = 73$

Beide Verfahren kommen ohne eine Trennung des ersten Summanden in seine Stellenwerte aus, im Gegensatz zu den anderen Strategien, bei denen das nicht funktioniert (siehe auch Kapitel 4).

Die Strategie „mit der Nähe zum vollen Zehner" ist schon sehr elegant- das müssen wir zugeben. Dennoch haben wir uns in diesem Arbeitsheft erst einmal dazu entschlossen, ausschließlich auf das Teilschrittverfahren zu setzen, weil es exakt nach dem Aufbau des Zehnersystems funktioniert und sich nur so perfekt alle Analogien zum Zahlenraum bis 10 und zu analogen Rechnungen im Zahlenraum bis 100 zeigen lassen. Und das müssen die Kinder verstehen lernen, denn sonst ist jede einzelne Aufgabe etwas ganz Neues und steht als Unikat ohne jeglichen Zusammenhang zu anderen Aufgabenstellungen da. Es entsteht eine unüberschaubare Masse an Aufgabenstellungen im Zahlenraum bis 100, die scheinbar nichts miteinander zu tun haben und es entwickelt sich eine regelrechte Angst vor dem Rechnen mit großen Zahlen. Das wollen wir vermeiden!

Ökonomisierende Rechenverfahren finden Kinder häufig von ganz alleine, wenn sie die Prinzipien des Rechnens im dekadischen Positionssystems verstanden, automatisiert und damit verinnerlicht haben. Da machen wir uns gar keine Sorgen. **Aber umgekehrt klappt das fast nie!**

[1]Die Webinare ILSA-Grundzüge beschäftigen sich (wie der Name schon sagt) mit dem basalen Aufbau des ILSA-Unterrichtskonzepts und finden mindestens zweimal pro Jahr statt (ILSA 1- Zahlenraum bis 10, ILSA SWS- Stellenwertsystem und demnächst ILSA 100- Rechnen im Zahlenraum bis 100 sowie ILSA-Screening- qualitative Screenings zu allen Einzelpunkten des Unterrichtskonzepts (Termine: siehe unsere Homepage www.ilsa-lernentwicklung.de).

7 Der einstufige Rechenprozess (M 3.2)

7.1 Was ist das?

Als einstufigen Rechenprozess bezeichnen wir diejenigen Rechenaufgaben, die mit Hilfe einer einzigen Zahlgleichung direkt zur Lösung führen. Es sind also keine zwei Rechnungen erforderlich und es müssen sich keine Zwischenergebnisse oder anderweitig Zahlen gemerkt werden, um zu Ergebnis zu kommen. Die Rechnung kann dabei auf der Einer- oder Zehner-Stelle stattfinden (wir beschränken uns aus Demonstrationsgründen auf Additionen):

Rechnen auf der Einer-Stelle (Kernstrukturen, Übung 12/2)

85 + 2 = ☐☐	35 + 4 = ☐☐	15 + 3 = ☐☐
2 + 75 = ☐☐	4 + 95 = ☐☐	3 + 45 = ☐☐

Rechnen auf der Zehner-Stelle (Kernstrukturen, Übung 12/3)

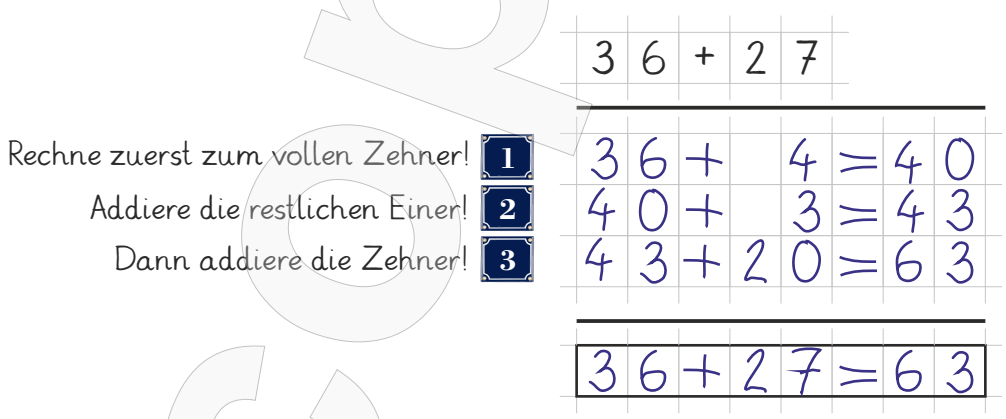
☐☐ + 30 = 97	69 + 20 = ☐☐	71 + ☐☐ = 91
☐☐ + 62 = 92	20 + 65 = ☐☐	20 + ☐☐ = 93

Im weiteren Verlauf kommt es zu Unterscheidungen zwischen der „Stufig- und der Schrittigkeit“, die wir an dieser Stelle vorab erläutern möchten:

7.2 Der Unterschied zwischen „stufig“ und „schrittig“

Beispiel: Dreistufiger Rechenprozess mit Zehnerübergang

Um dies genau zu erklären, nehmen wir eine Aufgabenstellung aus der Königsdisziplin des Rechnens im Zahlenraum bis 100:



Es handelt sich hier um einen 3-stufigen Rechenprozess mit Zehnerübergang. In diesem Fall herrscht eine Identität zwischen den Anzahl der Stufen (drei) und den Anzahl der Schritte (ebenfalls drei- als Hausnummern dargestellt). Der Aufgabentyp wird sich nicht ändern (es bleiben Additionen/Subtraktionen mit zwei zweistelligen Zahlen mit Zehnerübergang - also 3-stufige Rechenprozesse). Aber im Verlauf der Automatisierung ändert sich sukzessive die Anzahl der Rechenschritte bis hin zum Kopfrechnen:

36 + 27 = 63

Addiere zuerst die Einer! 1 — 36 + 7 = 43

+ 4 + 3

Dann addiere die Zehner! 2 — 43 + 20 = 63

Der vormals dritte Schritt (Hausnummern) ist jetzt der zweite Rechenschritt. Die Übung dient als Übergang zum 2-schrittigen Rechnen und erinnert in ihrem ersten Schritt noch an die Zerlegung der Einer für den Zehnerübergang, ohne dass die Komplette Zahlgleichung (wie auf der vorherigen Seite) nochmals aufgeschrieben wird.

36 + 27 = 63

Addiere zuerst die Einer! 1 — 36 + 7 = 43

Dann addiere die Zehner! 2 — 43 + 20 = 63

Ein weiterer Automatisierungsprozess: Die Erinnerung an die Zerlegung der Einer für den Zehnerübergang wird nicht mehr notiert, sondern muss jetzt im Kopf geleistet werden.

Der 3-stufige Rechenprozess wird in 2 Schritten berechnet.

1 — 36 + 27 = 63

Und so soll das dann ‘mal aussehen: Rechnen in einem Schritt! Und wenn das dann auch noch im Kopf geht (also ohne dass das Kind die Aufgabe sieht), dann empfehlen wir:

7.3 Lerninhalt und Lernziel

Haben Sie bereits mit dem Unterrichtskonzept und Arbeitsheft ILSA SWS gearbeitet, dann kennen Ihre Kinder bereits zweistellige Zahlen und sogenannte dekadische Rechenoperationen, die mit dem ILSA-Rechenrahmen auf ikonischer und enaktiver Ebene unterstützt werden.

Beispiel:

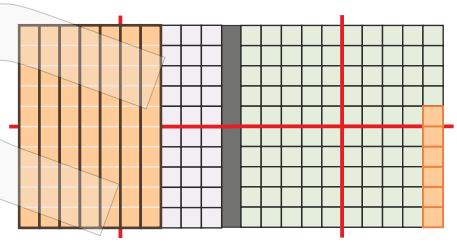
b)

Z	E		Z	E		Z	E
7	0	+		6	=		

Z	E		Z	E		Z	E
7	6	−		6	=		

Z	E		Z	E		Z	E
	6	+	7	0	=		

Z	E		Z	E		Z	E
7	6	−	7	0	=		



Die Rechenoperationen stützen sich auf den dekadischen Aufbau der Zahlen, was ja auch der Inhalt von ILSA SWS ist.

Dies wird nun weitergeführt. Die erlernten Zahlgleichungen im Zahlenraum bis 10 werden nun auf den Zahlenraum bis 100 übertragen. Dies erfolgt zunächst über Aufgabenstellung zu Kernbildern (siehe ILSA 1), dann zu Kernstrukturen und zum Schluss kombiniert. Wie schon weiter oben dargestellt, trennen wir zunächst das Rechnen auf der Einer-Stelle und dann das Rechnen auf der Zehnerstelle, damit es ein einstufiger Rechenprozess bleibt (die Schrittigkeit und die Stufigkeit des Rechenprozesses ist hier in der Anzahl identisch).

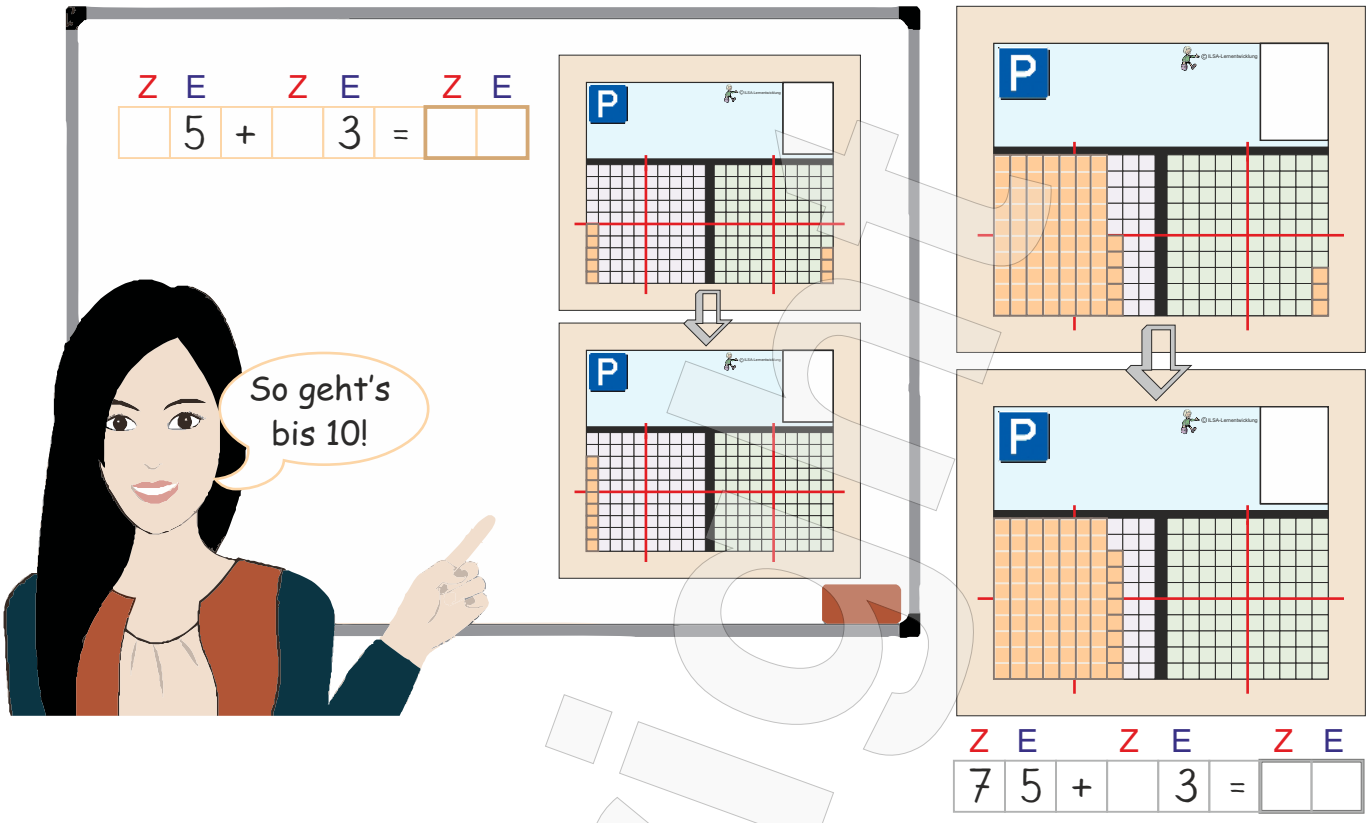
Das zentrale neue Lernziel für die Kinder sind die Analogiebildungen zum Zahlenraum bis 10 und die Analogien im Zahlenraum bis 100 - also nicht das Lösen der dafür benötigten Zahlgleichungen selbst. Die kennen sie bereits vom Rechnen im Zahlenraum bis 10.

Dazu ist unseres Erachtens eine intensive vorherige Beschäftigung mit dem Stellenwertsystem (ILSA SWS) unerlässlich. Die mangelnden Analogiebildungen sind in fast allen Fällen der Grund dafür, dass die Kinder im Zahlenraum bis 100 wieder in Zählstrategien „zurückfallen". Deshalb müssen diese intensiv beschult und automatisiert werden! „Das haben wir doch bereits alles im Zahlenraum bis 10 gerechnet", stimmt zwar für die zu lösenden Zahlgleichungen, aber eben nicht für die daraus resultierenden Analogien beim Rechnen im Zahlenraum bis 100!

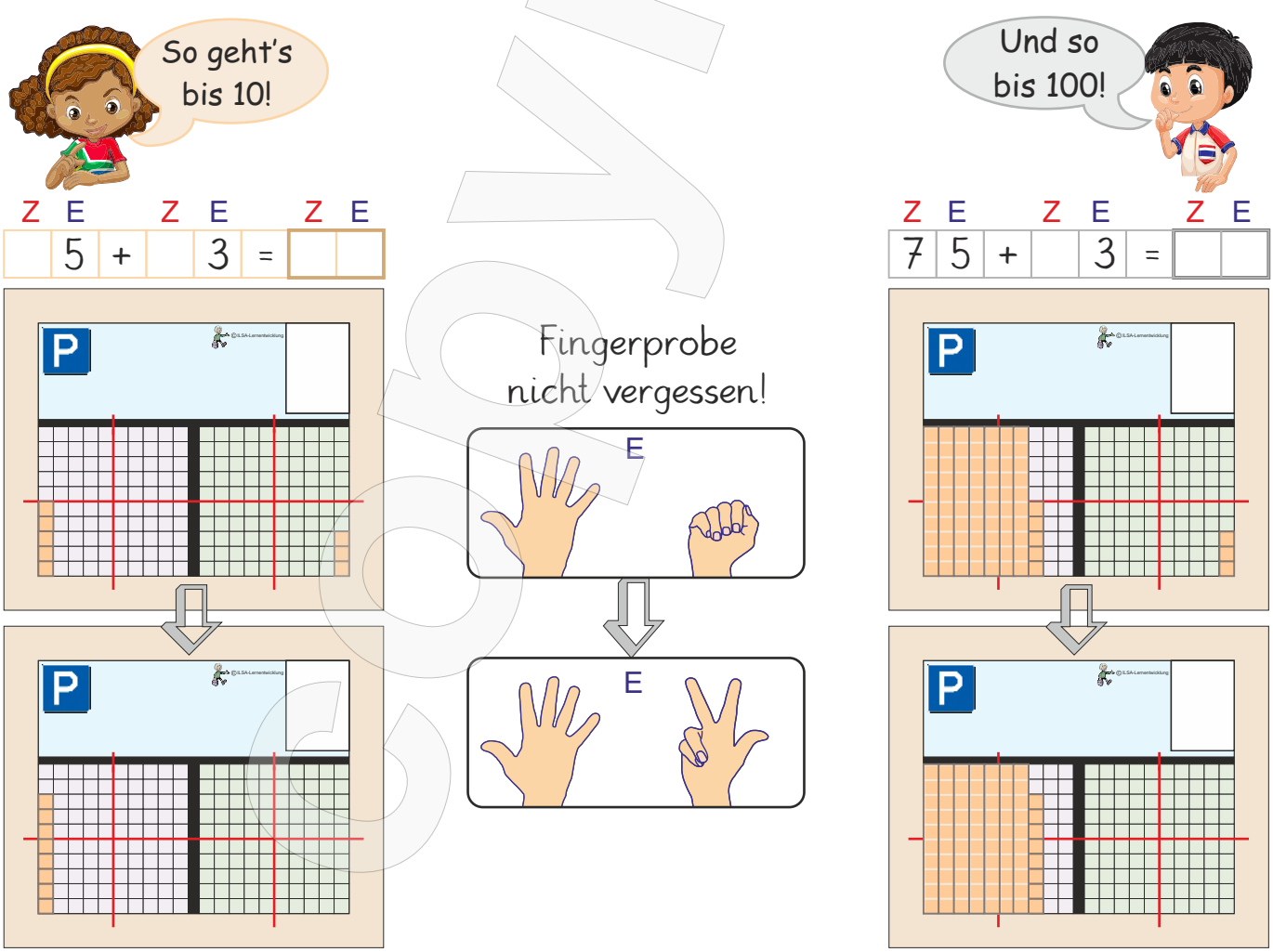
Bevor Sie mit dem Rechnen auf symbolischer Ebene beginnen, sollten Sie unbedingt in einer umfassenden Unterrichtseinheit die Aufgabenstellungen mit allen Kindern erarbeiten. Es ist dabei sehr günstig, wenn alle Kinder über ihren eigenen ILSA-Rechenrahmen und das dafür nötige Dienes-Material verfügen, damit jedes Kind selbst die Handlungen nachvollziehen kann.

Weisen Sie dabei auf die Analogien zum Zahlenraum bis 10 hin. Zeigen Sie den Kindern (Beamer, Dokumentenkamera, Whiteboard, Smartboard, etc.) die vorher gelöste Aufgabe, damit sie sie mit der analogen Aufgabe vergleichen können. Das geht natürlich auch im Arbeitsheft selbst.

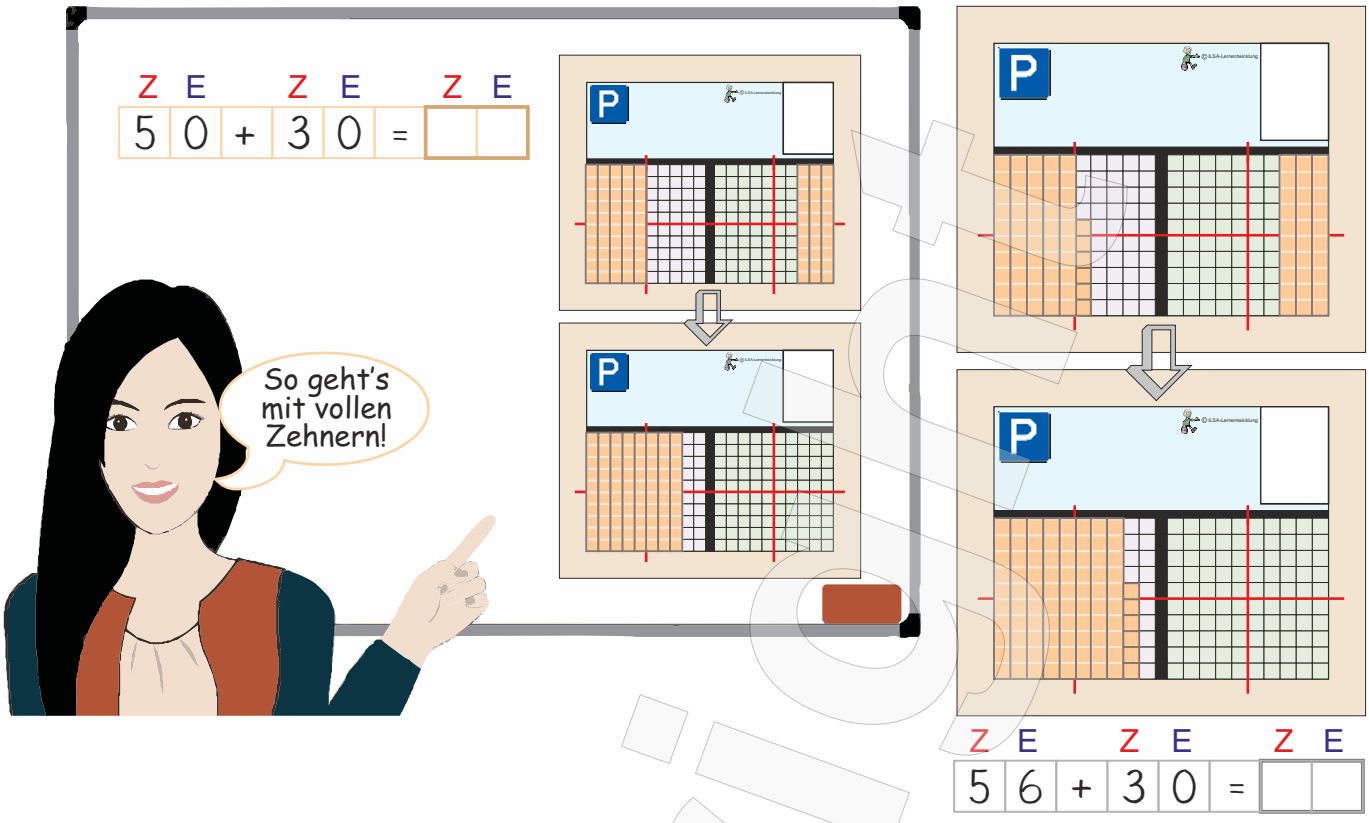
Im Unterricht:



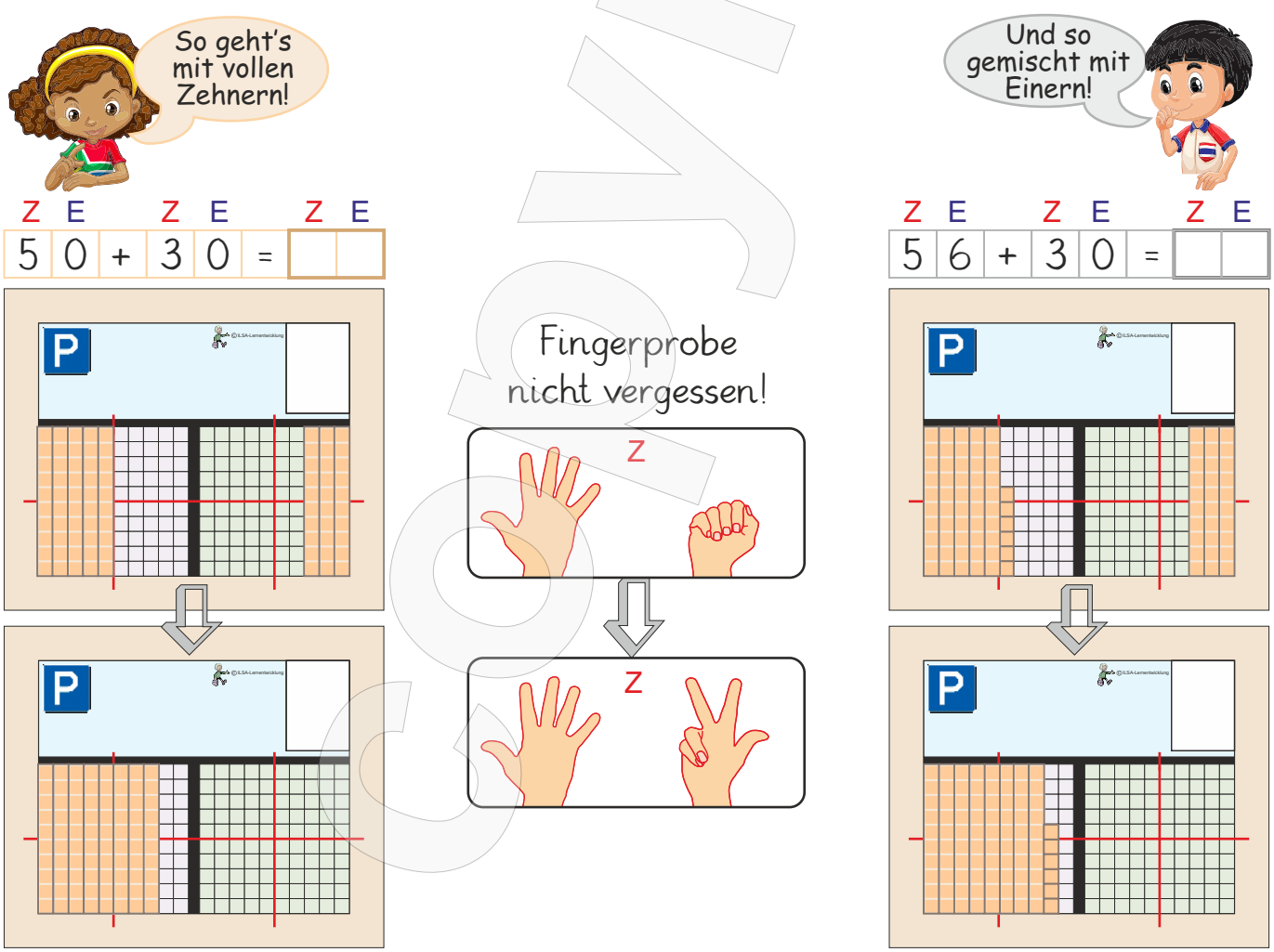
Im Arbeitsheft:



Im Unterricht:



Im Arbeitsheft:



Nach den Unterrichtseinheiten (siehe auch graue Markierung in der Kopfzeile) folgen immer Trainings zur Automatisierung auf der symbolischen Ebene:

Auf der Einer-Stelle

Z	E		Z	E		Z	E
	5	+		2	=		
8	5	+		2	=		
	2	+	7	5	=		

	5	+		4	=		
3	5	+		4	=		
	4	+	9	5	=		

	5	+		3	=		
1	5	+		3	=		
	3	+	4	5	=		

Auf der Zehner-Stelle

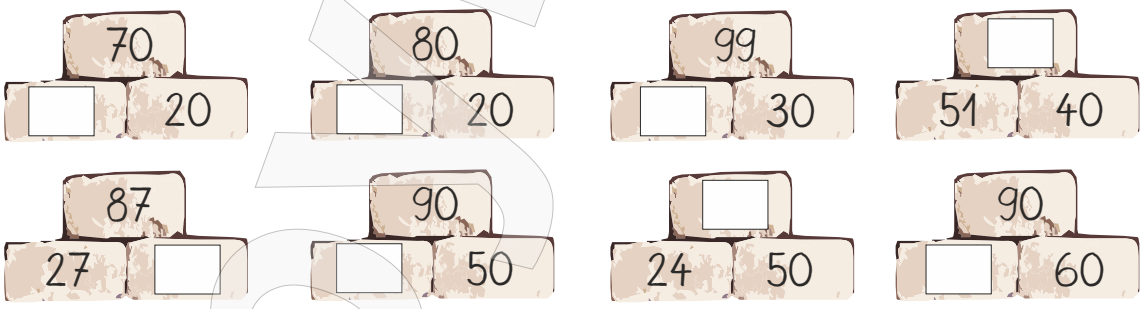
Z	E		Z	E		Z	E
5	0	+	2	0	=		
5	8	+	2	0	=		
2	0	+	5	3	=		

5	0	+	3	0	=		
5	5	+	3	0	=		
3	0	+	5	7	=		

5	0	+	3	0	=		
5	9	+	3	0	=		
3	0	+	5	4	=		

Aufgaben für Rechenfüchse finden sich in vielen Übungen:

Welche Nummern fehlen? Hilf dem ägyptischen Tempelbauer!



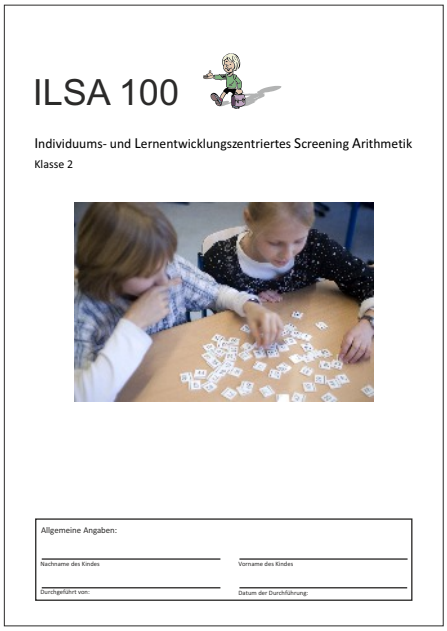
Tipp

Lassen Sie sich mit den einstufigen Rechenprozessen viel Zeit. Die Analogien sind der Schlüssel zum verständigen Rechnen im Zahlenraum bis 100. Aussagen der Kinder wie ...

- „Das ist ja immer das Gleiche!“
- „Da muss man ja immer dasselbe rechnen!“
- „Das ist ja alles gleich schwer!“
- „Das ist ja einfach!“

... sind ein untrügliches Zeichen dafür, dass die Kinder es alle verstanden haben. Erst dann kann man mit den zweistufigen Rechenprozessen ohne Zehnerübergang beginnen. Dafür werden die Analogien als gekonnt und automatisiert unterstellt.

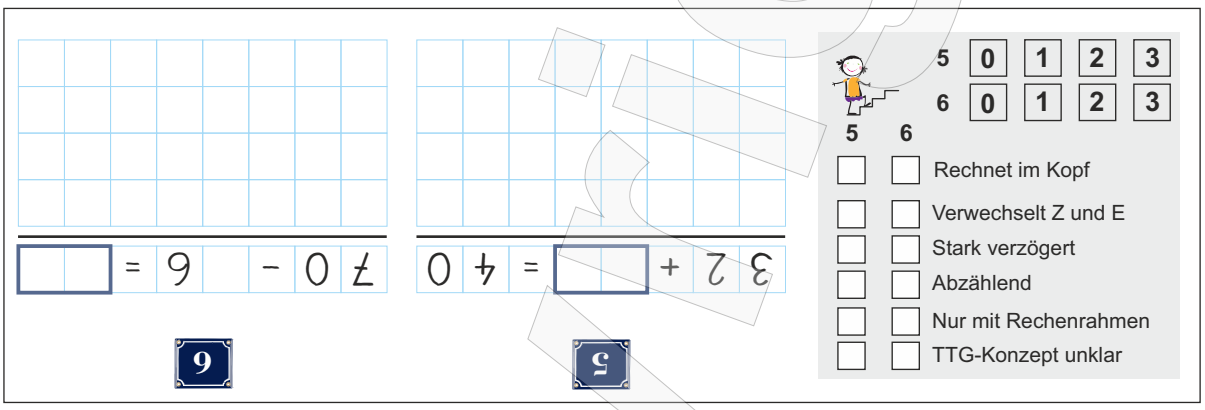
7.4 Kontrollaufgaben im ILSA-Screening 100

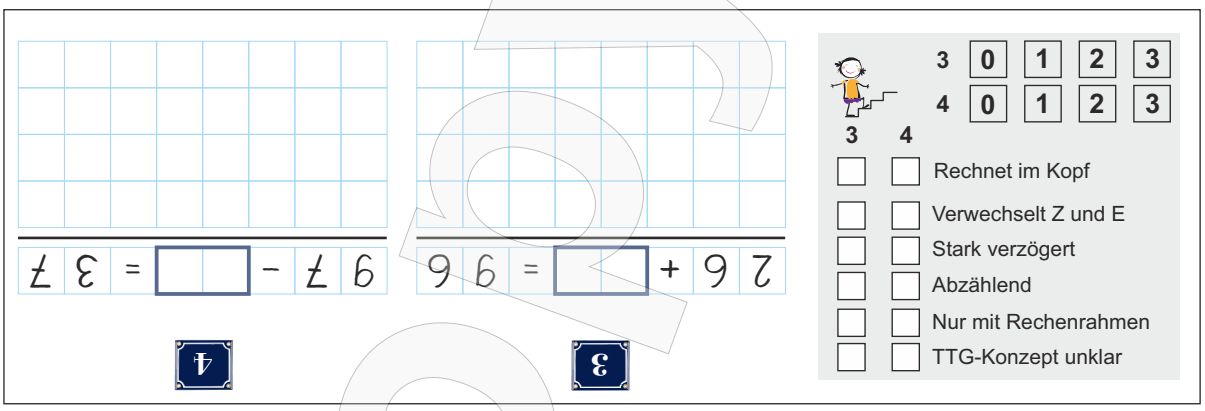


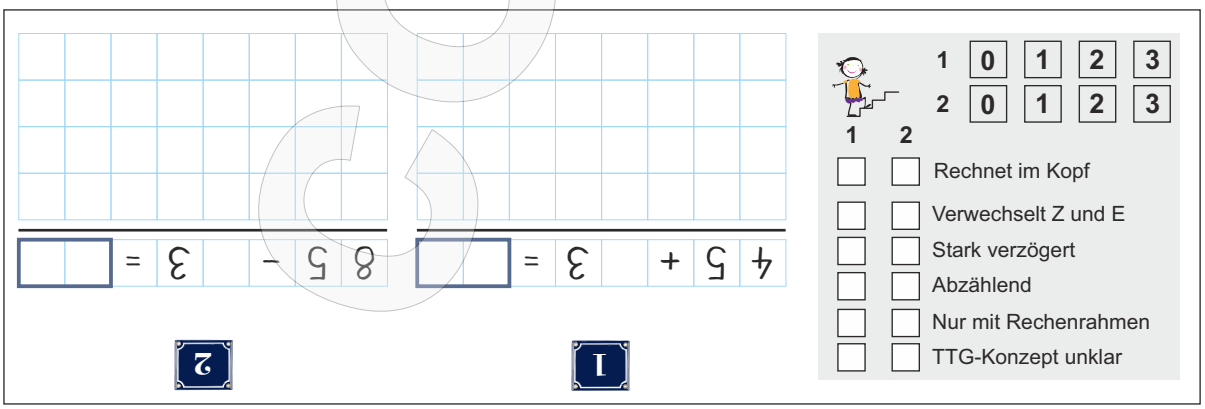
Für jedes der 3 Arbeitshefte finden Sie bei ILSA ein entsprechendes qualitatives Einzel-Screening. Das muss sich natürlich in den Schulalltag integrieren lassen und bearbeitet für jeden Rechenprozess (einstufig, zweistufig ohne ZÜ, zweistufig mit ZÜ und dreistufig mit ZÜ) markante Aufgabenstellungen. Die Aufgaben für den einstufigen Rechenprozess sehen Sie unten.

Die Aufgabenstellung sind natürlich absichtlich auf dem Kopf: Das Kind sitzt Ihnen gegenüber und muss die Aufgabe lesen können und ggf. auch Notizen machen. Sie müssen die Auswertung sehen.

Kind







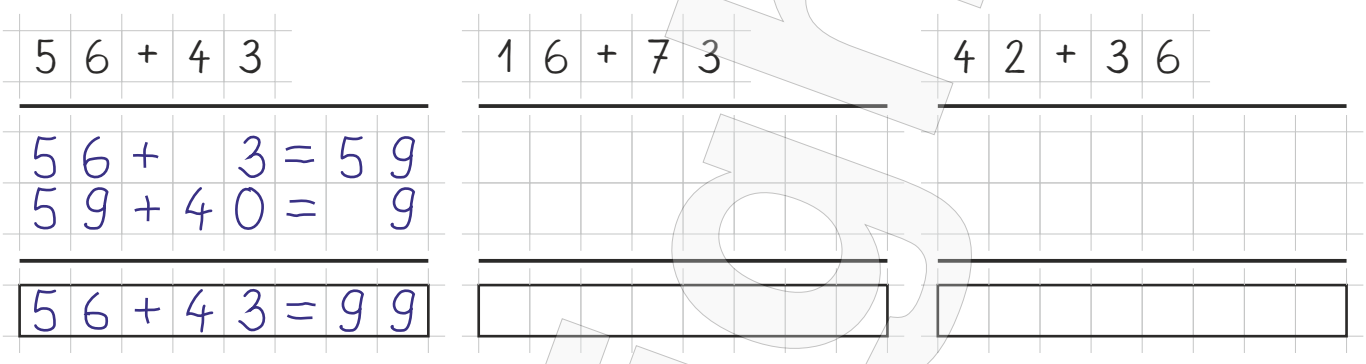
LehrerIn

8 Der zweistufige Rechenprozess (M 3.4)

8.1 Was ist das?

Als zweistufigen Rechenprozess bezeichnen wir diejenigen Rechenaufgaben, die mit Hilfe von zwei Zahlgleichungen zur Lösung führen. Die Rechnung findet zuerst auf der Einer- und dann auf der Zehner-Stelle statt (wir beschränken uns aus Demonstrationsgründen auf Additionen). Es gibt **keine Zehnerübergänge**!

Zweistufiger Rechenprozess (kombinierte Aufgabentypen, Übung 26/1)



8.2 Lerninhalt und Lernziel

Nachdem die Kinder die Analogien beim Rechnen mit Zahlen im Zahlenraum bis 100 zu den Rechenoperationen im Zahlenraum bis 10 automatisiert und verinnerlicht haben, tritt bei den zweistufigen Rechenprozessen ein Lerninhalt hinzu, den die Kinder noch nicht kennen. Eine Aufgabe führt nicht mehr mit einer einzigen Zahlgleichung zur Lösung!

Das zentrale neue Lernziel für die Kinder besteht darin, dass die Kinder ...

... eine Lösung mit Hilfe von zwei Zahlgleichungen ermitteln müssen

und

... sich in weiteren Automatisierungsphasen (z. B. beim Kopfrechnen) die Zehner-Stelle des zweiten Summanden bzw. Subtrahenden merken müssen.

In unserem Arbeitsheft ILSA 100 werden durchgehend zunächst die Einer addiert bzw. subtrahiert (siehe dazu auch Kapitel 6). Die Merkleistung beim späteren Kopfrechnen bezieht sich dabei NICHT auf Zwischenergebnisse (wie dies beim Rechnen nach getrennten Stellenwerten unabdingbar ist, siehe Kapitel 4), sondern lediglich auf die zu merkende Zehnerstelle des zweiten Summanden bzw. des Subtrahenden.

Es wird also lediglich der zweite Summand bzw. der Subtrahend zerlegt und auf keinen Fall der erste Summand oder der Minuend!

Beispiele:

Aufgabe		Algorithmus	Lerninhalt aus gedächtnispsychologischer Sicht
56 + 43 = ___			
56 + □3 = 59	1	Das Kind addiert die 3 Einer	Das Kind muss sich **nur** die 4 Zehner des zweiten Summanden merken! Das Kind muss sich **kein** Zwischenergebnis merken, sondern rechnet mit der 59 weiter.
59 + 40 = 99	2	Das Kind addiert die Zehner	Das Kind muss die 4 Zehner aus dem Kurzzeitgedächtnis abrufen.

Aufgabe		Algorithmus	Lerninhalt aus gedächtnispsychologischer Sicht
99 − 43 = ___			
99 − □3 = 96	1	Das Kind addiert die 3 Einer	Das Kind muss sich **nur** die 4 Zehner des Subtrahenden merken! Das Kind muss sich **kein** Zwischenergebnis merken, sondern rechnet mit der 96 weiter.
96 − 40 = 56	2	Das Kind addiert die Zehner	Das Kind muss die 4 Zehner aus dem Kurzzeitgedächtnis abrufen.

<u>Und auch hier gilt:</u>

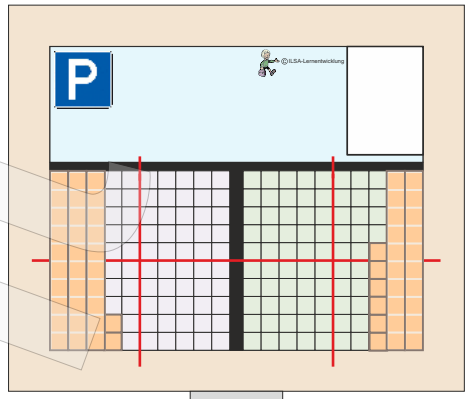
Bevor Sie mit dem Rechnen auf symbolischer Ebene beginnen, sollten Sie unbedingt in einer umfassenden Unterrichtseinheit die Aufgabenstellungen mit allen Kindern erarbeiten. Es ist dabei sehr günstig, wenn alle Kinder über ihren eigenen ILSA-Rechenrahmen und das dafür nötige Dienes-Material verfügen, damit jedes Kind selbst die Handlungen nachvollziehen kann.

Nur so entstehen innere Bilder, die die Kinder beim symbolischen Rechnen abrufen können. Diese Bilder (sofern die Kinder den Rechenprozess auch verstanden haben) bleiben im Gedächtnis und rücken beim automatisierten Rechnen zunehmend in den Hintergrund, können also bei Bedarf jederzeit erneut abgerufen werden („Wie ging das noch einmal?“). Der Satz „Übung macht den Meister!“ stimmt nur dann, wenn er als Automatisierungsprozess im Sinne einer Loslösung von ikonischen Vorstellungsebenen fungieren kann- also wenn das Kind den Lerninhalt vollständig durchdrungen hat.

Jegliches anderweitiges „üben, üben, üben“, ist nicht von dauerhaftem Erfolg gekrönt, wenn das Verständnis auf enaktiver sowie ikonischer Ebene nicht aufgebaut wurde.

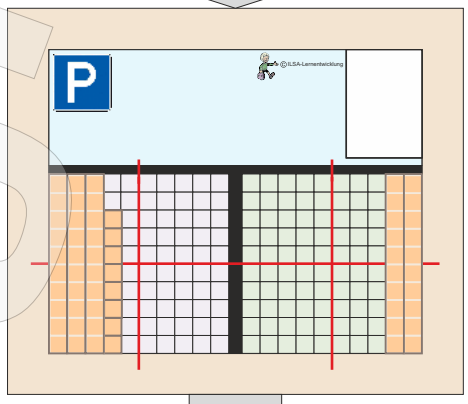
Im Unterricht:

3	2	+	2	6



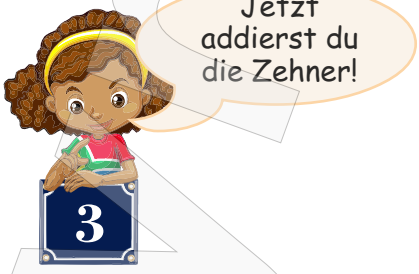
3	2	+	2	6

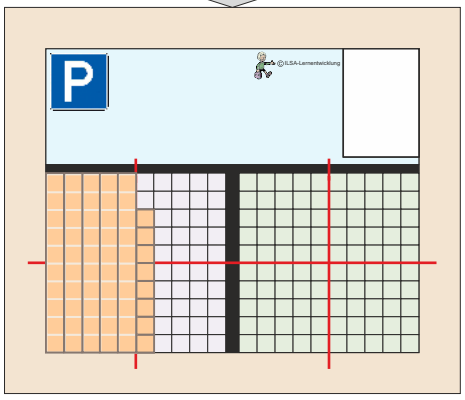
3	2	+		6	=	3	8



3	2	+	2	6

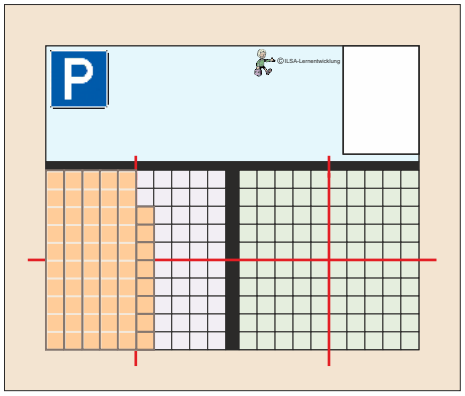
3	2	+		6	=	3	8
3	8	+	2	0	=	5	8





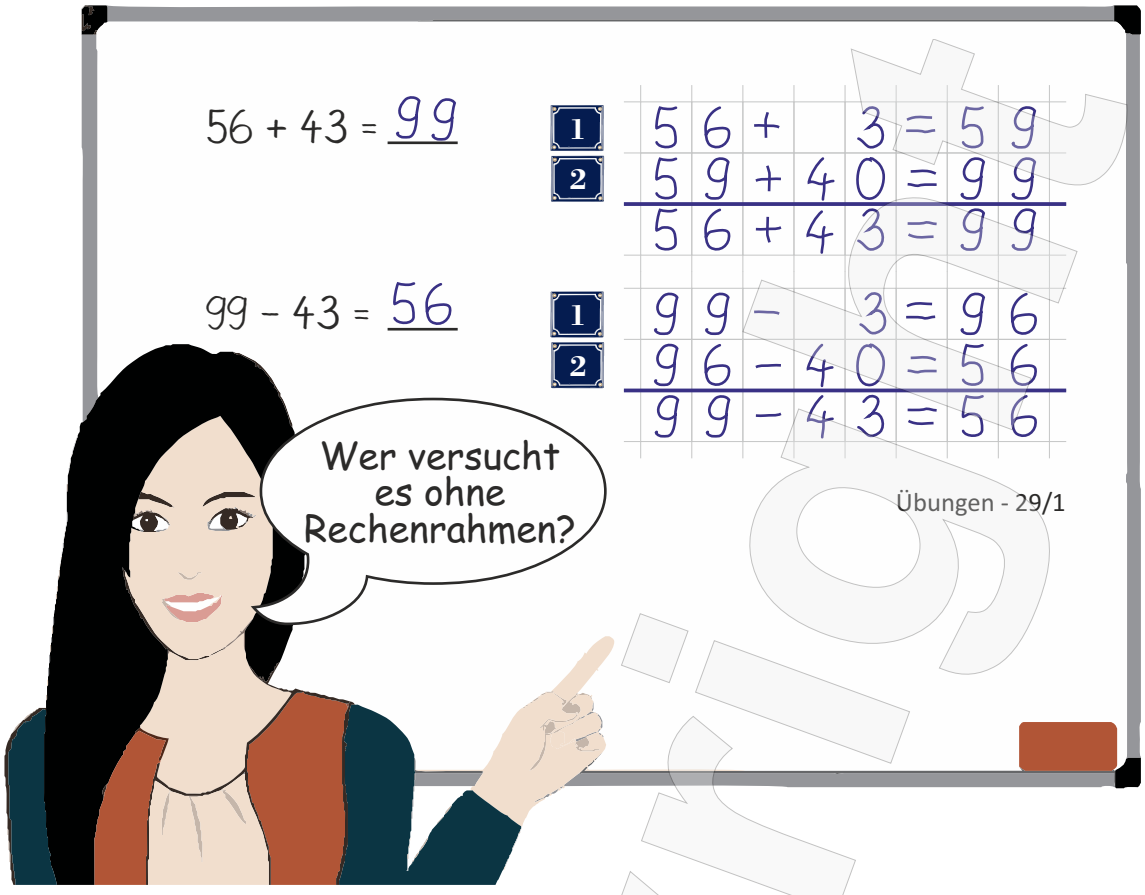
3	2	+	2	6

3	2	+		6	=	3	8
3	8	+	2	0	=	5	8
3	2	+	2	6	=	5	8



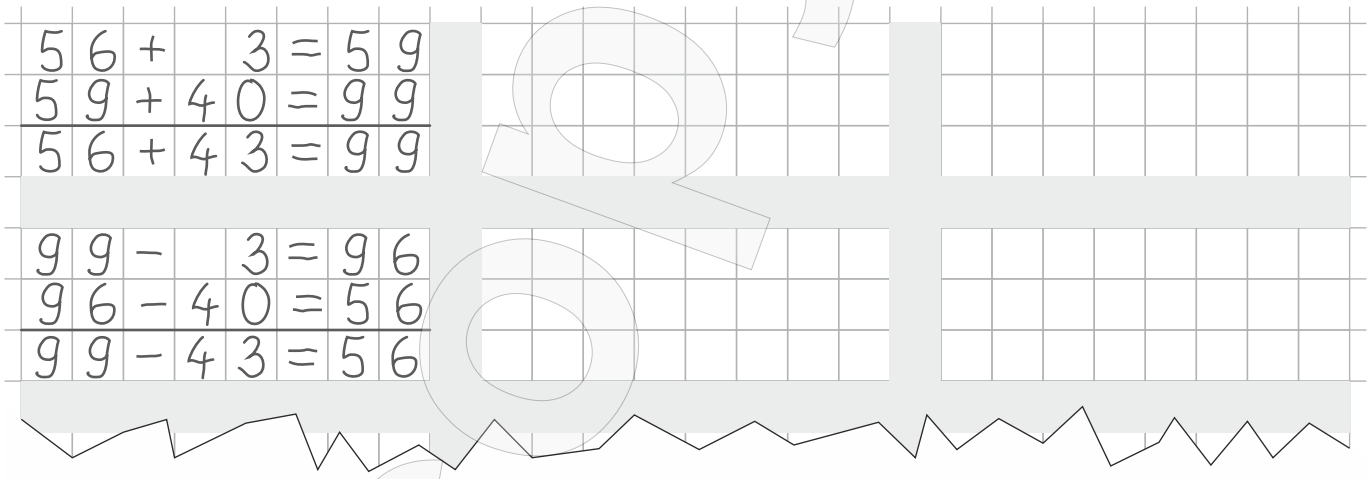
Übungen - 24/1

Nach den Unterrichtseinheiten (siehe auch graue Markierung in der Kopfzeile) folgen immer Trainings zur Automatisierung auf der symbolischen Ebene:



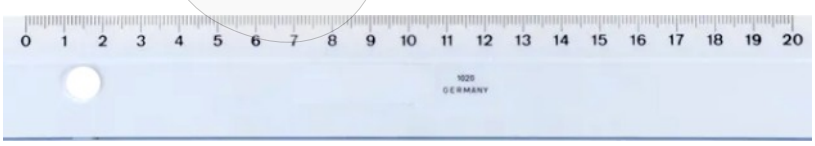
Übungen - 29/1

In weiteren Phasen des Trainings sollen die Kinder die Aufgaben in ein vorgegebenes Karo-Muster (später in ihr eigenes Hausaufgabenheft- wir empfehlen Lineatur 7) übertragen und ausrechnen:

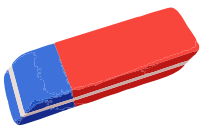


Übungen - 28/1 und 29/1

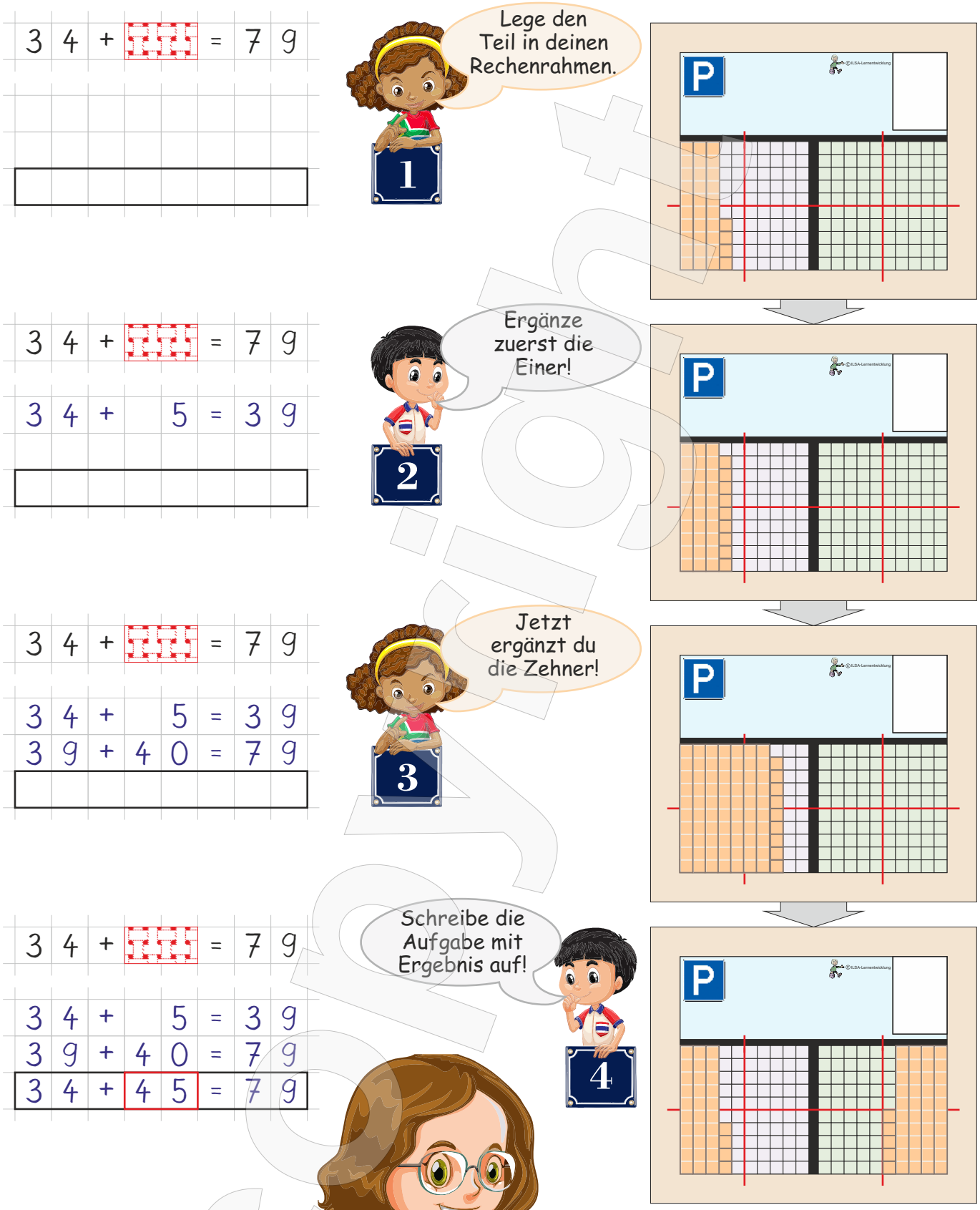
Nicht vergessen!



&

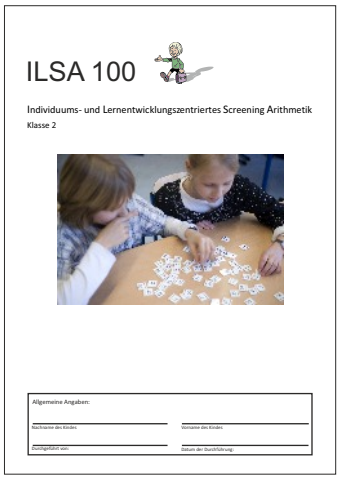


Analytische Fragestellungen werden in gleicher Weise (siehe die beiden vorherigen Seiten)eingeführt:



Übungen - 30/1

8.3 Kontrollaufgaben im ILSA-Screening 100


ILSA 100

Individuums- und Lernentwicklungszentriertes Screening Arithmetik
Klasse 2

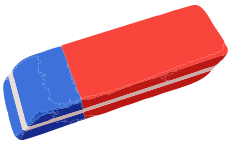
Allgemeine Angaben:

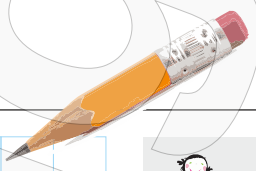
Nachname des Kindes | Vorname des Kindes

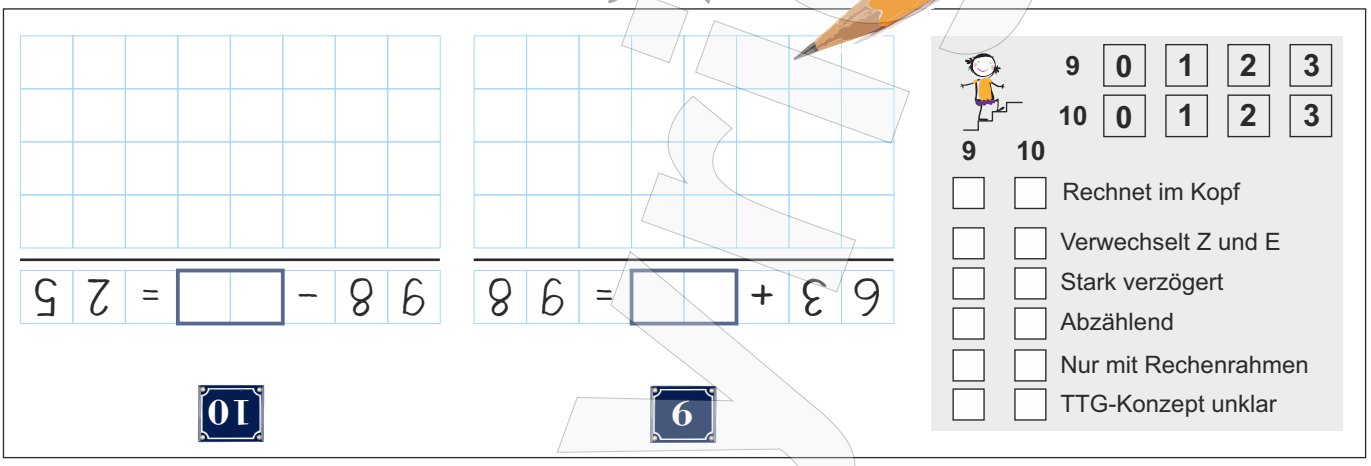
Durchgeführt von: | Datum der Durchführung:

Für jedes der 3 Arbeitshefte finden Sie bei ILSA ein entsprechendes qualitatives Einzel-Screening. Das muss sich natürlich in den Schulalltag integrieren lassen und bearbeitet für jeden Rechenprozess (einstufig, zweistufig ohne ZÜ, zweistufig mit ZÜ und dreistufig mit ZÜ) markante Aufgabenstellungen. Die Aufgaben für den zweistufigen Rechenprozess sehen Sie unten.

Die Aufgabenstellung sind natürlich absichtlich auf dem Kopf: Das Kind sitzt Ihnen gegenüber und muss die Aufgabe lesen können und ggf. auch Notizen machen. Sie müssen die Auswertung sehen.

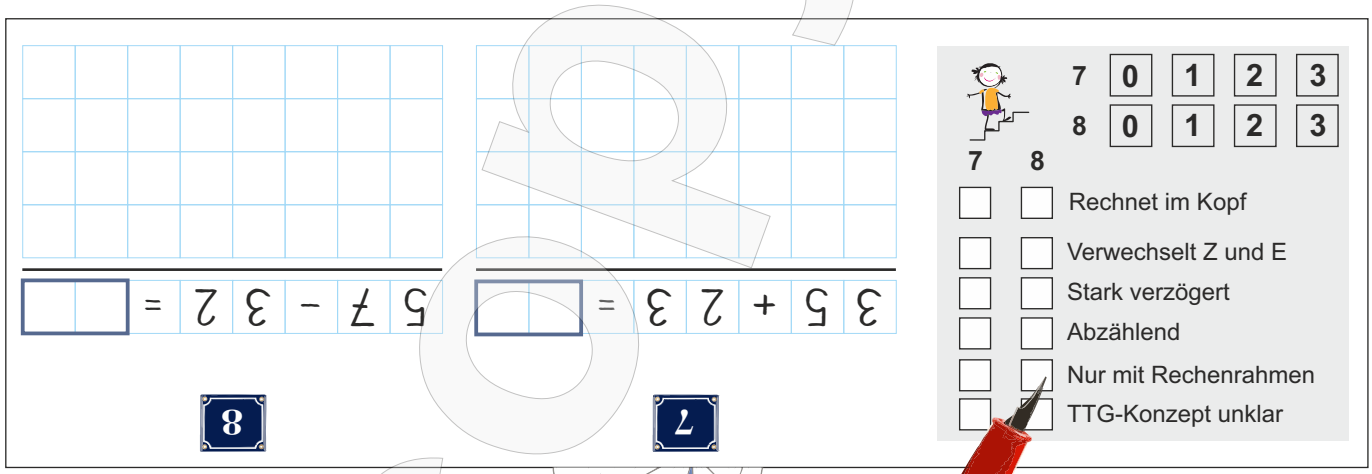






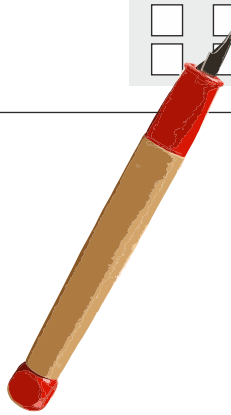
	9	10
	☐	☐ Rechnet im Kopf
	☐	☐ Verwechselt Z und E
	☐	☐ Stark verzögert
	☐	☐ Abzählend
	☐	☐ Nur mit Rechenrahmen
	☐	☐ TTG-Konzept unklar

9 0 1 2 3
10 0 1 2 3



	7	8
	☐	☐ Rechnet im Kopf
	☐	☐ Verwechselt Z und E
	☐	☐ Stark verzögert
	☐	☐ Abzählend
	☐	☐ Nur mit Rechenrahmen
	☐	☐ TTG-Konzept unklar

7 0 1 2 3
8 0 1 2 3



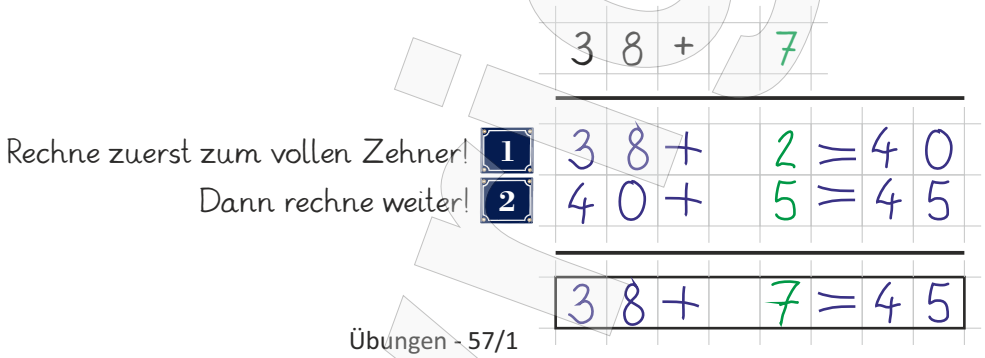
9 Der zweistufige Rechenprozess mit Zehnerübergang (M 3.5)

9.1 Was ist das?

Als zweistufigen Rechenprozess mit Zehnerübergang bezeichnen wir diejenigen Rechenaufgaben, bei denen ein Zehner über- bzw. unterschritten wird. Zum Lernziel der Zweistufigkeit wurde im Kapitel 8 nähere Ausführungen gemacht. Die Kinder sollten Rechenaufgaben, die mit zwei aufeinanderfolgenden Zahlgleichungen gelöst werden, verstanden und automatisiert haben. Auch das Ablegen von Zahlen während der einzelnen Rechenschritte im Kurzzeitgedächtnis sollte bereits funktionieren, bevor man sich den Zehnerübergängen widmet.

Gelöst werden die Aufgaben im Teilschrittverfahren, also zunächst das Auffüllen der Einer zum nächsten vollen Zehner und dann das Addieren der restlichen Einer.

Zweistufiger Rechenprozess mit Zehnerübergang (kombinierte Aufgabentypen, Übung 26/1)

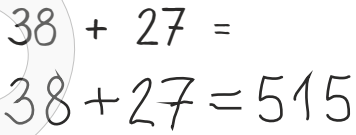


Übungen - 57/1

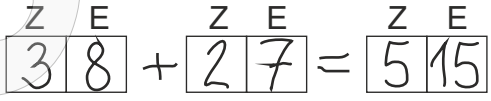
9.2 Rechnen mit getrennten Stellenwerten mit Zehnerübergang

Wir möchten neben dem Kapitel 4 auf dieses Thema an dieser Stelle noch einmal kurz eingehen. Man kann ohne Übertreibung sagen, dass nun beim Rechnen das Chaos ausbricht- ergebnismäßig sowieso (wenn die Kinder überhaupt zu einer Lösung gelangen) und gedächtnispsychologisch beim Kopfrechnen. Dazu als erstes zwei Klassiker beim zehnerüber- und unterschreitenden Rechnen mit zweistelligen Zahlen, die wir jeden Tag in der Diagnostik von den Kindern und Jugendlichen „vorgerechnet" bekommen.

Beispiel 1



Und warum? Weil sich gnadenlos an das Schema gehalten wird: „Rechne Zehner plus Zehner und Einer plus Einer!" Man braucht nur ein paar Kästchen einzuzeichnen und merkt: Das Kind hat zugehört!



Im Übrigen: Kommentare wie „Das ist unmöglich! Da können niemals über 500 rauskommen!" zielen an der Sache völlig vorbei, weil das Kind (wenn es in Klasse 2 ist) noch gar keine Hunderter kennt.

Beispiel 2

81 - 79 =

81 – 79 = 18

Wer unsere Publikationen[1] verfolgt, erkennt diese fast zur Legende herangereifte Aufgabe, die wir von Kindern und Jugendlichen jeden Alters und jeder Schulform (auch vom Gymnasium) präsentiert bekommen. Der Algorithmus dürfte bei allen Kolleg_Innen bekannt sein:

	Z	E		Z	E		Z	E	
	8		–	7		=	1		
	1		–		9	=		?	*„Kann man doch nicht rechnen!“*
„Da rechne ich dann ...“	9		–		1	=		8	*„... das klappt!“*
⇒	8	1	–	7	9	=	1	8	

Wie schon angedeutet: Etwas furchtbar Neues ist das nicht- Kommutativgesetz bei der Subtraktion angewandt. Fragt man die Kinder, ob man beim Minus-Rechnen die Tauschaufgabe rechnen kann, kommt häufig ein ziemlich souveränes: *„Nein!“* Das wichtigste beim Rechnen ist aber, dass man ein Ergebnis hat- das bleibt leider auch in der Oberstufe so!

Die Fehlerursache liegt beim Rechnen nach getrennten Stellenwerten (genauer gesagt die Trennung des ersten Summanden bzw. des Minuenden nach der Zehner- und Einerstelle). Das führt (in Fortführung des Kapitel 4) bei Zehnerübergängen (von späteren Hunderterübergängen oder gar kombinierten Übergängen wollen wir hier gar nicht reden) zu Ergebnissen, die bereits in ihren Größenordnungen völlig falsch sind.[2]

Erheblich bedauernswerter (wie wir meinen fast sträflich) sind Algorithmen, die man in zwar wenigen, aber doch nicht unbedeutenden Mathe-Büchern und Übungsheften findet und so aussehen:

8	2	–	4	5	=	3	7
8	0	–	4	0	=	4	0
	2	–		5			3
4	0	–		3	=	3	7

Zumindest haben sich die Autoren dieser „blendenden Idee“ nicht auch noch getraut, bei der zweiten Gleichung ein Gleichheitszeichen zu notieren. Dass Kinder dann bei Subtraktionen die Zahlen vertauschen, wie es ihnen gerade passt, dürfte sonnenklar sein. Man tut anscheinend alles, um das Teilschrittverfahren „auszutricksen“ und meint, es damit den Kindern leichter zu machen. Das Gegenteil ist der Fall, wie wir jetzt weiter sehen werden!

[1] Siehe dazu auch das zweimal im Jahr erscheinende Rechenschwäche-Journal Kopf und Zahl, das Sie kostenfrei abonnieren können. Weitere Informationen, praktische Tipps und hoffentlich interessante Artikel finden Sie auf folgenden Homepages: MLI (www.rechenschwaeche.org), MLZ (www.mlz-dortmund.de), ILSA (www.ilsa-lernentwicklung.de), AK Lernforschung (www.arbeitskreis-lernforschung.de) und Kopf und Zahl (www.dykalkulie.de)

[2] Dass die Kinder das nicht sehen, liegt ganz häufig daran, dass das Stellenwertsystem entweder kein, nur schematisch oder nur ansatzweise Thema war. ILSA setzt VOR dem Rechnen mit zweistelligen Zahlen auf eine intensive Beschäftigung mit dem Stellenwertsystem. Das kann erhebliche Fehler in Größenordnungen vermeiden (siehe ILSA SWS).

Die „Rechen-Katastrophe“ spitzt sich dann aus gedächtnispsychologischer Sicht zu, wenn es um’s Rechnen im Kopf geht:[1]

Aufgabe		Algorithmus	Gedächtnisleistung
58 + 27 = ___			
50 + 20 = 70	1	Das Kind addiert die Zehner	Das Kind muss sich beide Ziffern der Einer-Stellen merken (8 **und** 7)! Das Kind muss das Zwischenergebnis 70 abspeichern.
8 + 7 = ?	2	Das Kind will die Einer addieren	Das Kind muss die 8 **und** die 7 aus dem Kurzzeitgedächtnis abrufen.
8 + 2 = 10	3	Das Kind rechnet zur 10 (Passer)	Das Kind muss bei der Zerlegung der 7 die 5 abspeichern (zusätzlich zur 70 von oben).
10 + 5 = 15	4	Das Kind addiert Teil 2 der 7 (5)	Das Kind muss sich zur 70 noch das Zwischenergebnis 15 merken.
70 + 10 = 80	5	Das Kind addiert die 10	Das Kind muss das hoffentlich vorhandene Zwischenergebnis 70 und die 10 der Zahl 15 abrufen. Das Kind muss die 5 abspeichern.
80 + 5 = 85	6	Das Kind addiert die 5 zum Endergebnis	

Bei der Betrachtung dieser einzelnen Schritte drängt sich eine Frage förmlich auf: „Was muss ich noch ‘mal rechnen?“ Und so wird bei ILSA 100 am Ende im Kopf gerechnet:

Aufgabe		Algorithmus	Gedächtnisleistung
58 + 27 = ___			
2 5	1	Das Kind zerlegt die 7 in 2 und 5 und gelangt dadurch direkt zur 60 und addiert 5	Das Kind muss sich die 2 Zehner merken. Das Kind muss sich kein Zwischenergebnis merken, sondern rechnet sofort mit der 65 weiter!
60 + 5 = 65			
65 + 20 = 85	2	Das Kind addiert die 20	Das Kind muss die 2 Zehner aus dem Kurzzeitgedächtnis abrufen.

Kommentar im Vergleich zu oben: **Ohne Worte!**

[1] Natürlich sieht das Kind beim Kopfrechnen die Aufgabenstellung nicht!

9.3 Lerninhalt und Lernziel

Zwei Abteilungen müssen vorher beherrscht werden:

Analoge Aufgaben zum Zahlenraum bis 10 beim Rechnen bis 100
(einstufige Rechenprozesse)
Das Rechnen mit zwei Zahlgleichungen und Merken eines Zwischenergebnisses
(zweistufige Rechenprozesse ohne Zehnerübergang)

Neues Lernziel: Bei der ersten Zahlgleichung muss zusätzlich ...

... der Passer bestimmt werden (=verliebte Zahl)

und

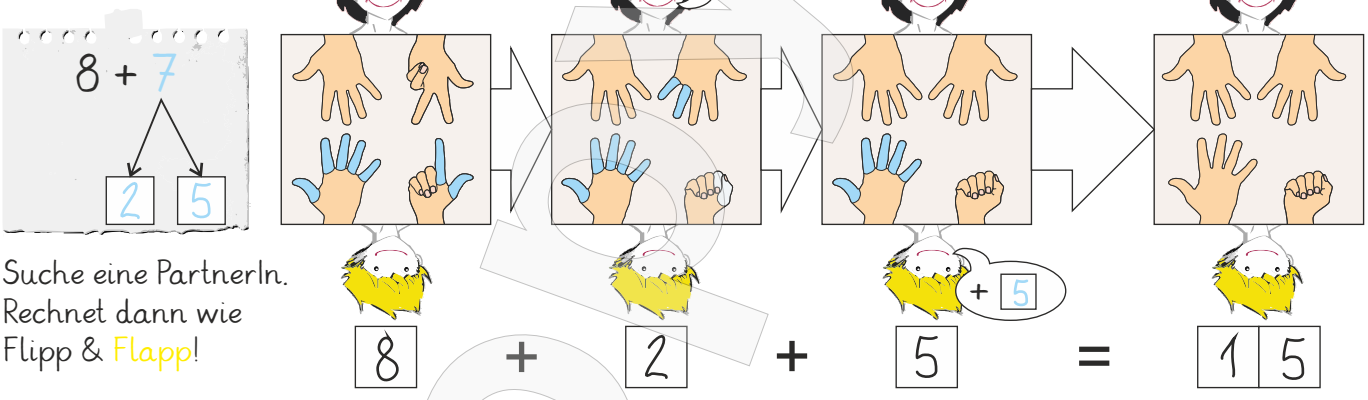
... der 2. Summand (Subtrahend) entsprechend zerlegt werden

Dazu finden Sie im Arbeitsheft 3 eine Vielzahl von Anregungen auf enaktiver Ebene, die Sie im Unterricht mit den Kindern alle durchnehmen sollten.

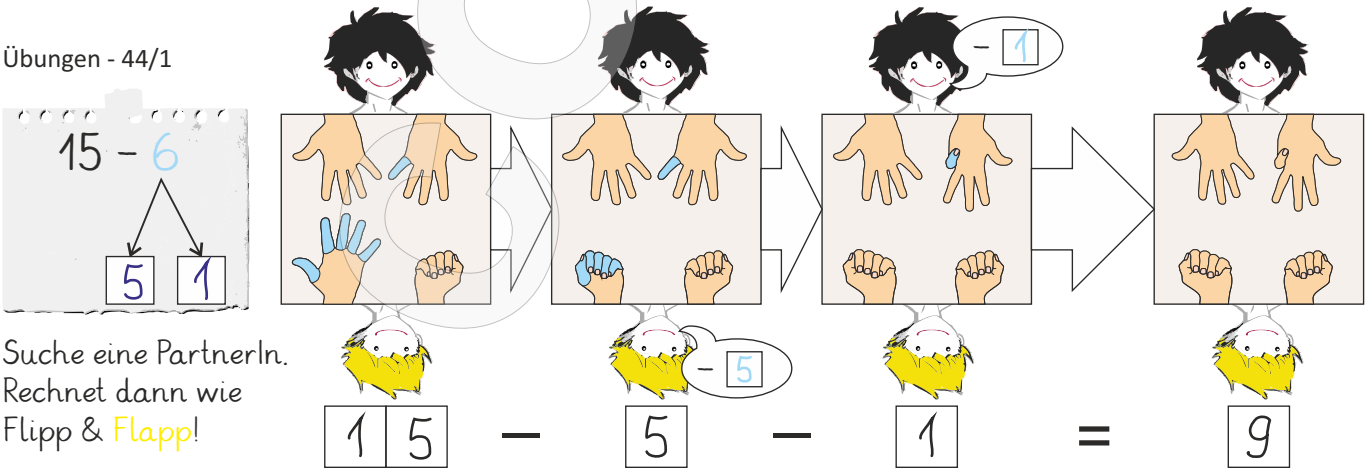
9.3.1 Herleitung des Übergangs aus dem Zahlenraum bis 20 (Partnerarbeit)

Damit können die Kinder beides sehen: Den Passer, die Zerlegung und das Endergebnis auf der Einer-Stelle. Hier ein Beispiel für die Addition und für die Subtraktion.

Übungen - 42/1

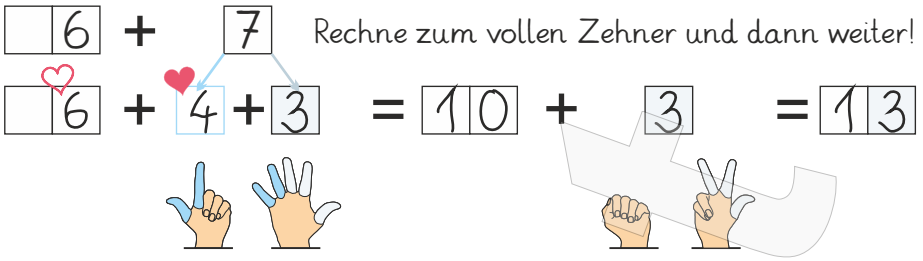


Übungen - 44/1

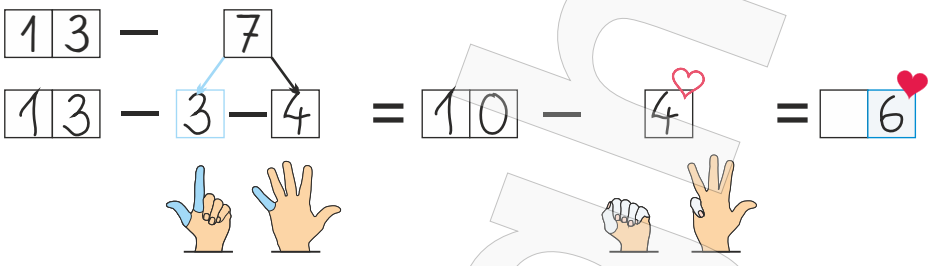


9.3.2 Erste Automatisierung: Rechnen nur mit dem 2. Summanden bzw. den Subtrahenden

Übungen - 47/1

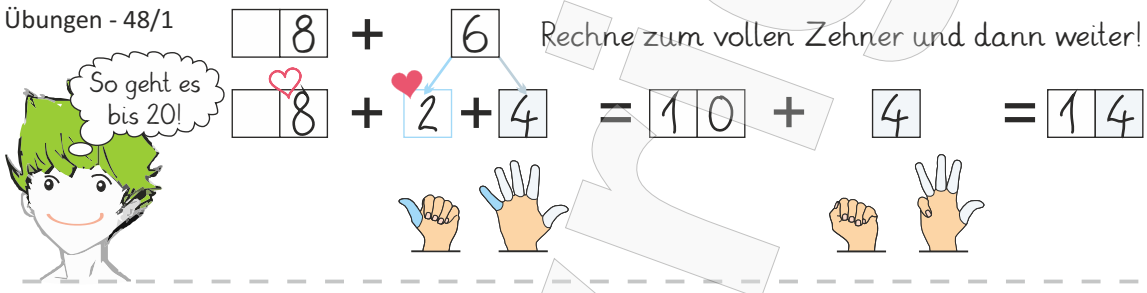


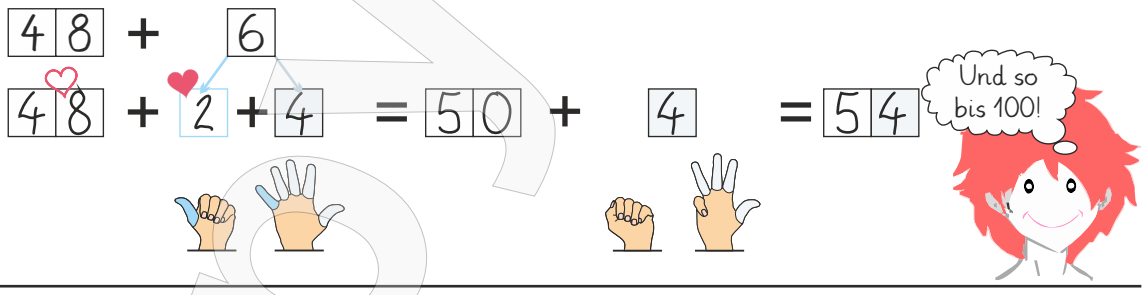
Übungen - 47/2



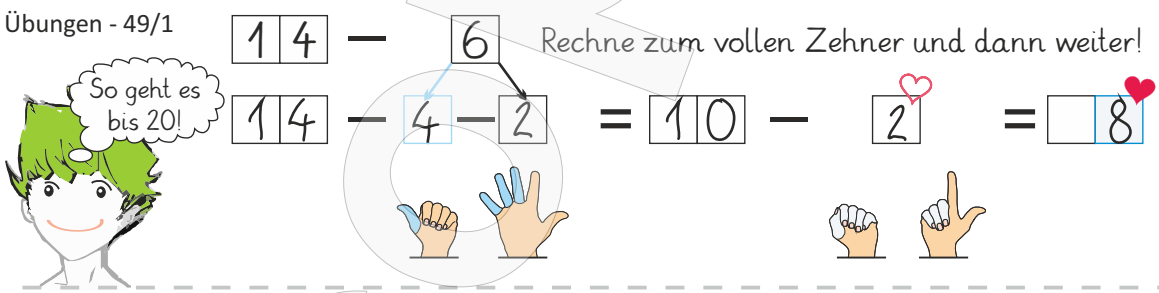
9.3.3 Die Analogiebildung vom Zahlenraum bis 20 auf den Zahlenraum bis 100

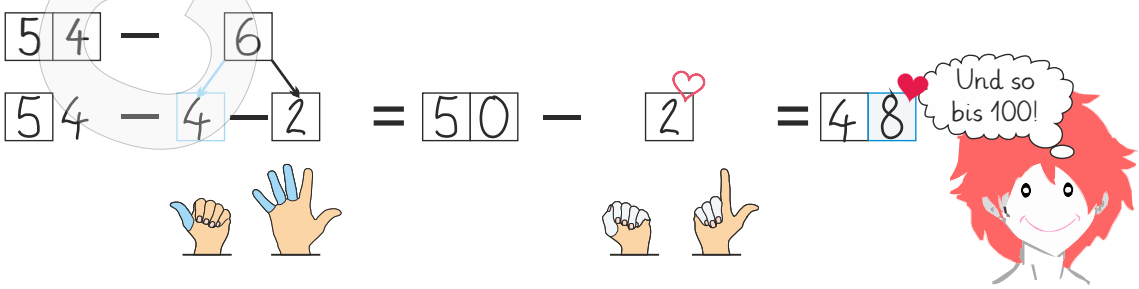
Übungen - 48/1





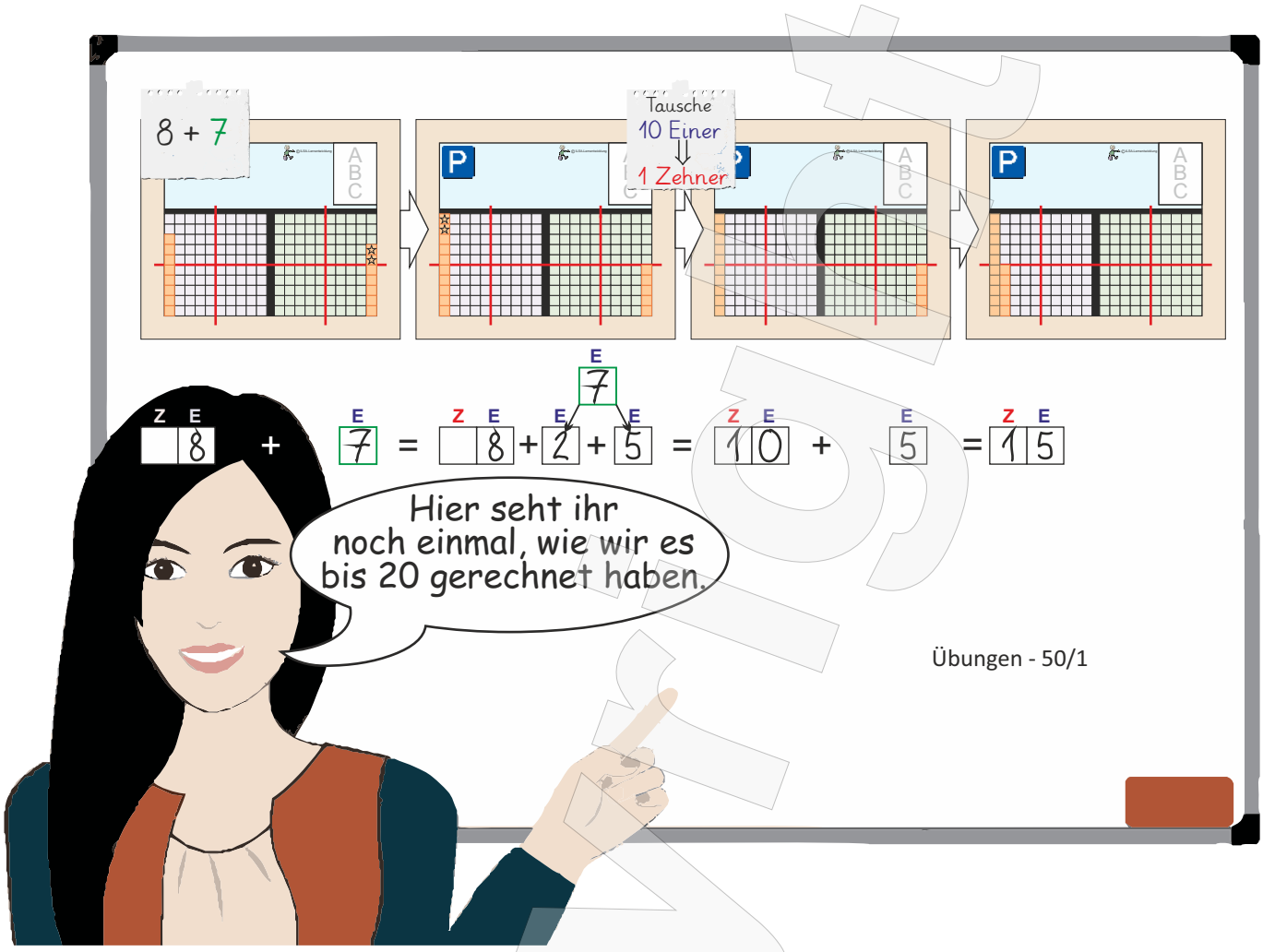
Übungen - 49/1



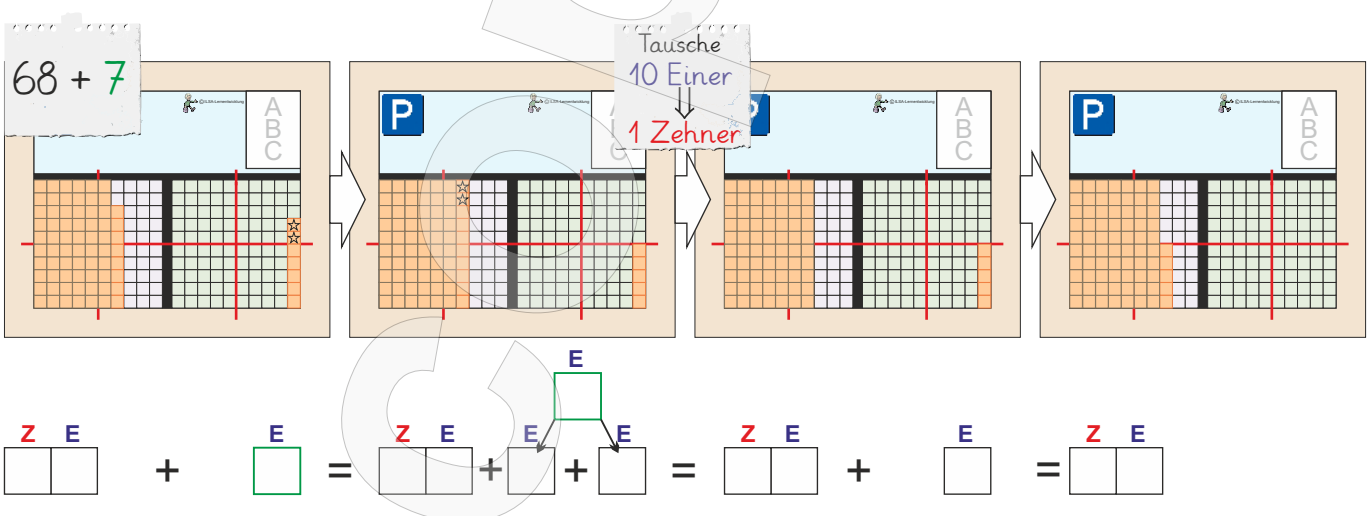


9.3.4 Die Äquivalenzdarstellungen auf dem Rechenrahmen (Analogien zum ZR bis 20 im ZR 100)

Die Kinder führen alle Aufgaben auf enaktiver Ebene durch. Zeigen Sie den Kindern bei den Aufgaben im Zahlenraum bis 100 parallel, wie es beim Rechnen bis 20 funktioniert hat (Bspl. nur Addition).



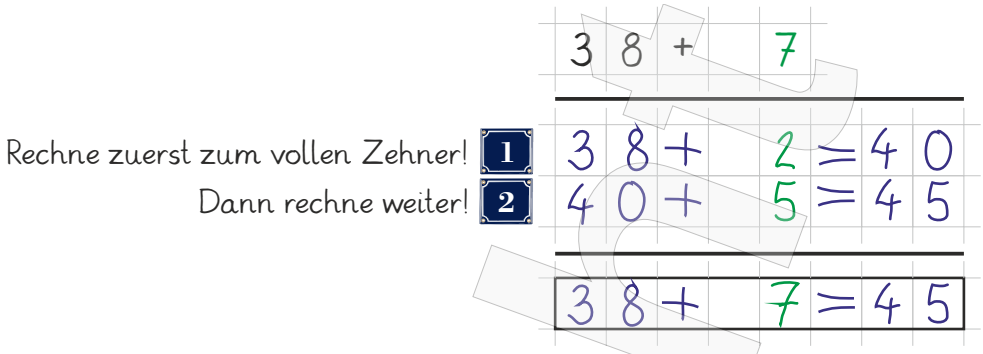
Die Kinder bearbeiten die analoge Aufgabe:



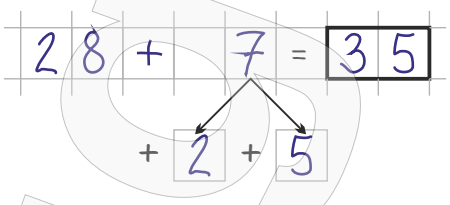
9.3.5 Die verschiedenen Trainingseinheiten zur Automatisierung auf symbolischer Ebene

Wir demonstrieren die Abfolge lediglich für die Addition:

Übungen - 57/1



Übungen - 66/1



28 + 7 = 35

9.4 Fit für das Einmaleins

Es bleibt natürlich jeder Schule selbst überlassen, wann sie das Einmaleins auf den Stundenplan setzt. Eines sollte man jedoch bedenken: Wer nicht vernünftig mit Zehnerüberschreitungen im Zahlenraum bis 100 rechnen kann, dem ist das Errechnen von Lösungen mit Hilfe des Distributivgesetzes (Verteilungsgesetz- also die Kernaufgaben) verstellt. Das ist in unseren Zentren der häufigste Grund dafür, dass die Kinder bestenfalls einige Reihen auswendig „aufplappern“ können, die sie aber (wenn nicht stetig immer wieder von neuem geübt wird) laufend wieder vergessen. Und das betrifft auf keinen Fall nur die lernschwachen Kinder, sondern ansonsten auch gute Auswendiglerner. Das Multiplizieren zu verstehen heißt:

a) Die Multiplikation wird als fortgesetzte Addition hergeleitet.

b) Alle Aufgaben der kurzen Reihen müssen entwickelt werden.

c) Die Zerlegung (Verteilung- Distributivgesetz) von Multiplikationsaufgaben in Aufgaben aus der kurzen Reihe muss erarbeitet werden.

d) Mit Hilfe der Zerlegungen werden die einzelnen 1mal1-Reihen sukzessive mit den Kindern erarbeitet.

Die allermeisten Mathe-Bücher gehen so vor. Für den Punkt b) und d) erläutern wir kurz, warum man mit der Addition und Subtraktion das Rechnen mit zweistufigen Rechenprozessen mit Zehnerübergang abgeschlossen und automatisiert haben muss.

Wir möchten hier keine Abhandlung über die Einführung der Multiplikation schreiben, sondern lediglich den Zusammenhang zu den im Arbeitheft 3 behandelten Rechenprozessen darstellen.

zu b)
Die Aufgaben der kurzen Reihen bestehen in der Reihe ihrer Abfolge aus:

$1 \cdot \square = ?$ $2 \cdot \square = ?$ $5 \cdot \square = ?$ $10 \cdot \square = ?$

In der Abfolge des Erlernens für alle 1x1-Reihen beginnen wir in unseren Zentren mit der Aufgabe

$1 \cdot \square = ?$ als die Addition eines Faktors zur Null $0 + \square = \square$:

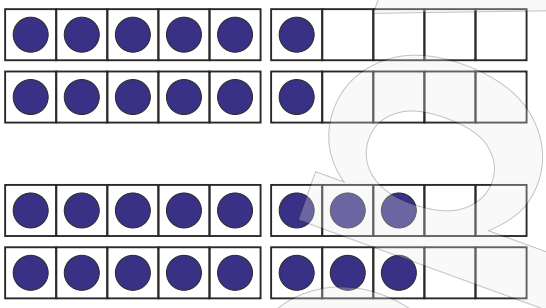
1 · 2 = 2, 1 · 3 = 3, ..., 1 · 9 = 9- das fällt den Kindern in aller Regel ganz leicht.

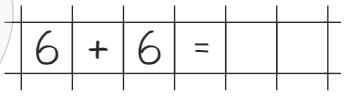
Die Aufgabe $10 \cdot \square = ?$ erfordert weiter keine neue Rechenkenntnisse, aber Einsichten in's Stellenwertsystem und fällt den Kindern ebenfalls nicht schwer:
10 · 2 = 20, 10 · 3 = 30, ..., 10 · 9 = 90

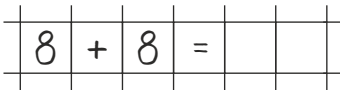
Es folgt die Aufgabe $2 \cdot \square = ?$, die über das Verdoppeln der Zahlen 2, 3, ..., 9 hergeleitet werden:
2 · 2 = 4, 2 · 3 = 6, ..., 2 · 9 = 18

Das Verdoppeln dieser Zahlen ist Thema dieses Arbeitshefts und wird über Fünfer-Strukturen im zusammengesetzen Zwanziger-Feld ikonisch dargestellt:

Übungen - 68/1







Die schwierigste Aufgabe aus den kurzen Reihe ist $5 \cdot \square = ?$, weil die Kinder sich diese Aufgaben durch das Halbieren der Ergebnisse aus den Aufgaben $10 \cdot \square = ?$ herleiten müssen. Besonders bei vollen Zehnern mit einer ungeraden Ziffer kommt es gehäuft zu Schwierigkeiten. Aber auch diese Aufgaben sind Grundstock (=Kernstrukturen des Einmaleins) für das Erlernen aller anderen Produkte und deren Werte (gemeint ist hier der Term, NICHT einfach das Ergebnis!) in den Einmaleins-Reihen:
5 · 2 = 10, weil 10 · 2 = 20, 5 · 3 = 15, weil 10 · 3 = 30, ..., 5 · 9 = 45, weil 10 · 9 = 90

Ohne Kenntnisse im dekadischen Positionssystem, die das Zerlegen und Halbieren der vollen Zehner ermöglichen und ohne zweistufige Rechenprozesse (35 + 35 = 70- als Probe) scheitern die Kinder bereits hier!

zu d)

Der Aufbau der Einmaleins-Reihen erfolgt über das Distributivgesetz, manchen vielleicht noch aus der Algebra der Mittelstufe bekannt- ausmultiplizieren: $a(b+c) = ab + ac$

Hergeleitet wird die Zerlegung von Produkten in Produkte aus Kernaufgaben über die Addition.

Beispiel 1

$7 \cdot 6 = \underbrace{6+6+6+6+6} + \underbrace{6+6}$

$7 \cdot 6 = \underbrace{5 \cdot 6} + \underbrace{2 \cdot 6}$

$7 \cdot 6 = \underbrace{30 + 12}$

$7 \cdot 6 = 42$

Der letzte Term (30 + 12) erfordert eine zweistufige Addition ohne Zehnerübergang.

Bei den folgenden Beispielen lassen wir die Herleitung über die Addition weg.

Beispiel 2

$6 \cdot 9 = \underbrace{5 \cdot 9} + \underbrace{1 \cdot 9}$

$6 \cdot 9 = \underbrace{45 + 9}$

$6 \cdot 9 = 54$

Der letzte Term (45 + 9) erfordert eine zweistufige Addition mit Zehnerübergang.

Beispiel 3

$8 \cdot 6 = \underbrace{10 \cdot 6} - \underbrace{2 \cdot 6}$

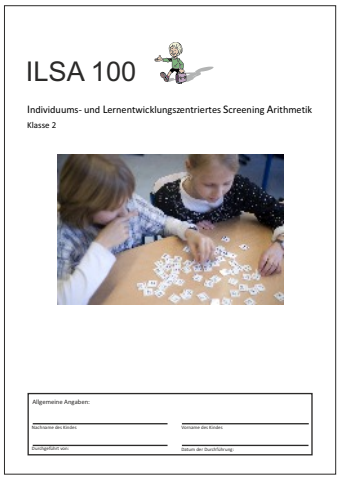
$8 \cdot 6 = \underbrace{60 - 12}$

$8 \cdot 6 = 48$

Der letzte Term (60- 12) erfordert eine zweistufige Subtraktion ohne Zehnerübergang.

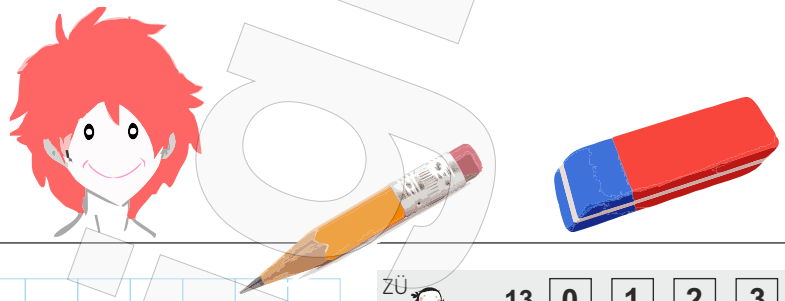
So lassen sich dann alle Produkte des kleinen Einmaleins mit Hilfe des Distributivgesetzes und der Kernaufgaben herleiten. Additionen und Subtraktionen aus der „Königsdisziplin“ dieses Arbeitheftes (dreistufige Rechenprozesse mit Zehnerübergang) sind dafür nicht notwendig.

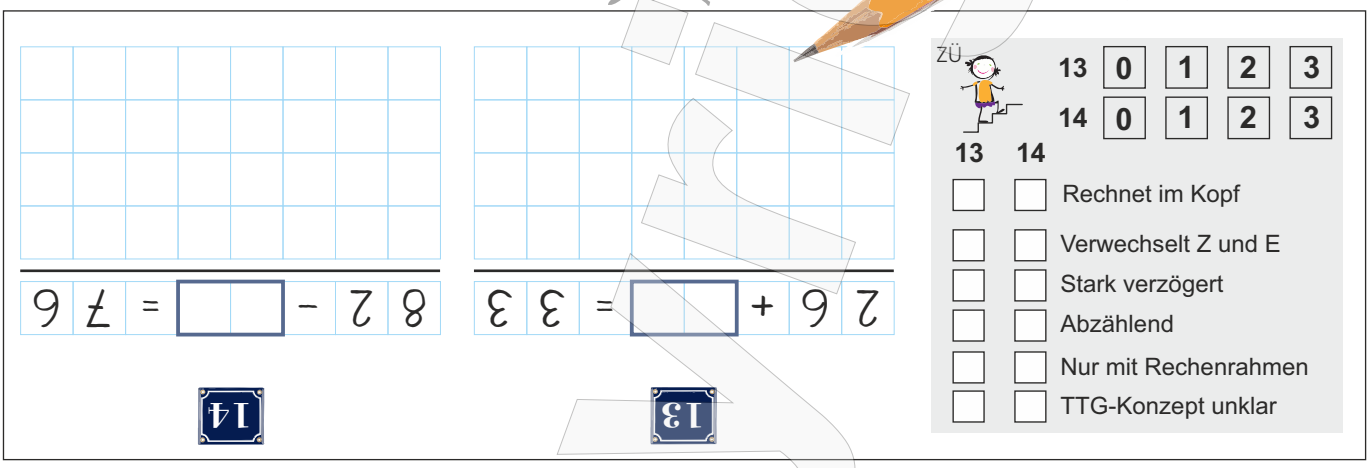
9.5 Kontrollaufgaben im ILSA-Screening 100

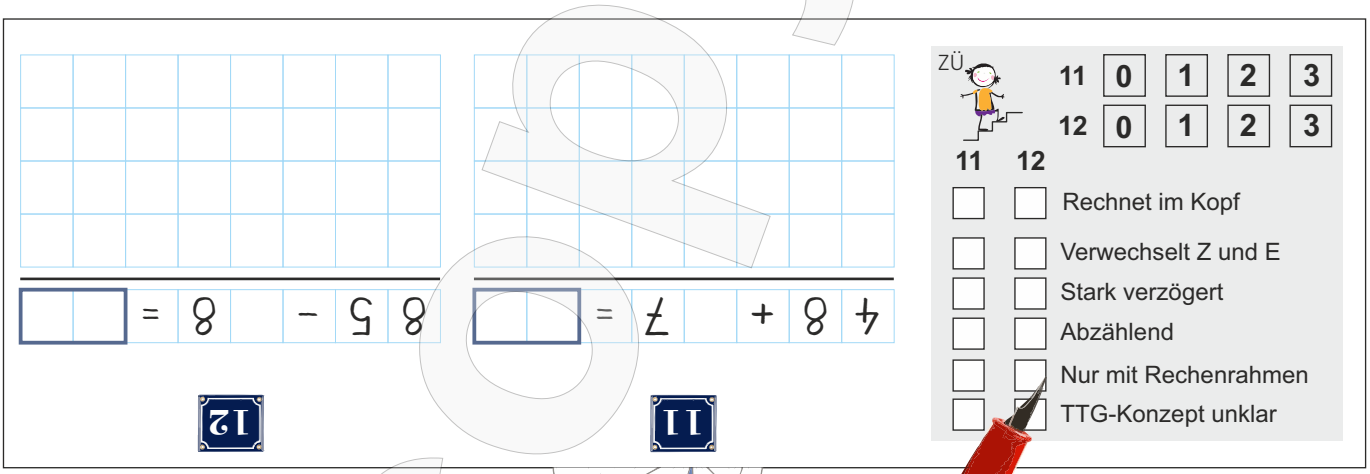


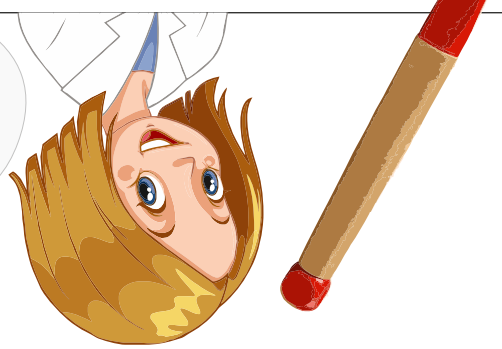
Für jedes der 3 Arbeitshefte finden Sie bei ILSA ein entsprechendes qualitatives Einzel-Screening. Das muss sich natürlich in den Schulalltag integrieren lassen und bearbeitet für jeden Rechenprozess (einstufig, zweistufig ohne ZÜ, zweistufig mit ZÜ und dreistufig mit ZÜ) markante Aufgabenstellungen. Die Aufgaben für den zweistufigen Rechenprozess mit Zehnerübergang sehen Sie unten.

Die Aufgabenstellung sind natürlich absichtlich auf dem Kopf: Das Kind sitzt Ihnen gegenüber und muss die Aufgabe lesen können und ggf. auch Notizen machen. Sie müssen die Auswertung sehen.









Copyright

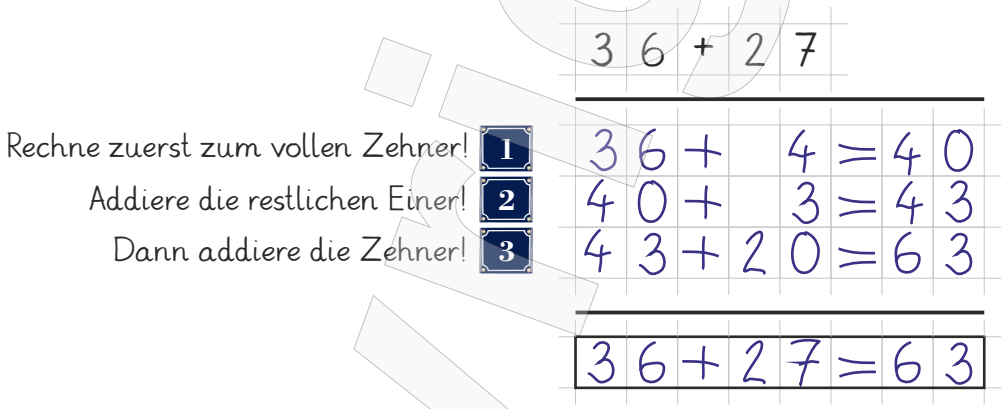
10 Der dreistufige Rechenprozess mit Zehnerübergang (M 3.6)

10.1 Was ist das?

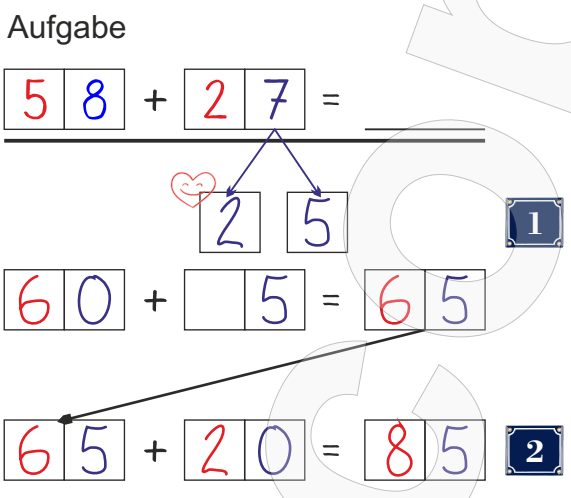
Als dreistufigen Rechenprozess mit Zehnerübergang bezeichnen wir diejenigen Rechenaufgaben, bei denen zweistellige Zahlen (also erster und zweiter Summand bzw. Minuend und Subtrahend) mit Zehnerüber- und Unterschreitungen gelöst werden müssen. Kombiniert werden nun die Lernziele aus Kapitel 8 und 9. Das Merken von Zahlen muss vorher funktionieren; genauso wie die Zehnerübergänge selbst.

Gelöst werden die Aufgaben im Teilschrittverfahren, also (bei der Addition) zunächst das Auffüllen der Einer zum nächsten vollen Zehner, dann das Addieren der restlichen Einer und zum Schluss das Addieren der Zehner (Reihenfolge der Einer und Zehner wie im Kapitel 8 erlernt- siehe dazu auch Kapitel 5).

Dreistufiger Rechenprozess mit Zehnerübergang (kombinierte Aufgabentypen, Übung 69/1)



Beim Rechnen im Kopf stellen diese Rechenprozesse im Arbeitsheft 3 die höchsten gedächtnispsychologischen Anforderungen, weshalb wir sie auch als „Königsdisziplin“ bezeichnen. Ob alle Kinder die Aufgaben (wie unten nochmals dargestellt) zum Schluss im Kopf lösen können sollen oder gar müssen, hängt unseres Erachtens wesentlich von der generellen Lernstärke des Kindes ab.



Bei Kindern mit besonderem Förderbedarf beim Lernen dürften bei diesen Anforderungen schon einmal Grenzen auftauchen, die nicht durchbrochen werden können. Wir denken: Wenn sie das Teilschrittverfahren in der Form von Übung 69/1 beherrschen, dann hat man nicht nur viel, sondern sehr viel erreicht!

10.2 Lerninhalt und Lernziel

Dazu gibt es nicht viel zu sagen, weil es selbsterklärend ist:

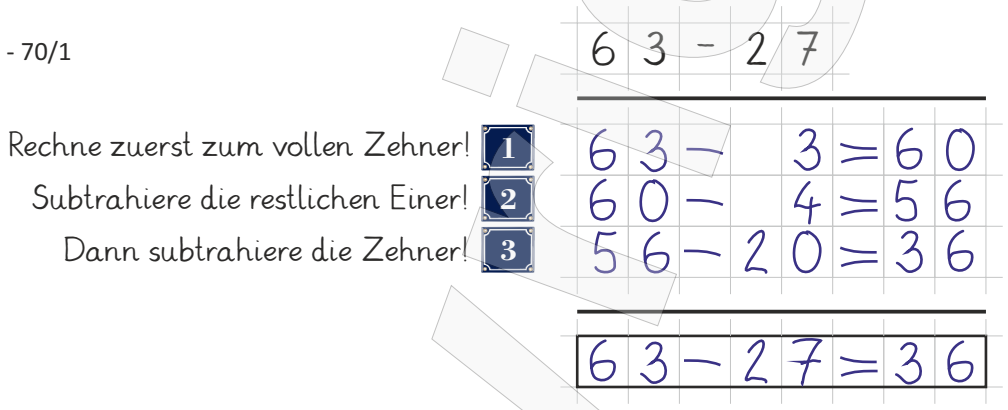
Zum zweistufigen Rechenprozess mit Zehnerübergang kommt eine dritte Stufe hinzu:
Es werden zum Schluss noch Zehner addiert bzw. subtrahiert.

Auf die Übungen auf enaktiver und ikonischer Ebene haben wir im Arbeitsheft verzichtet.

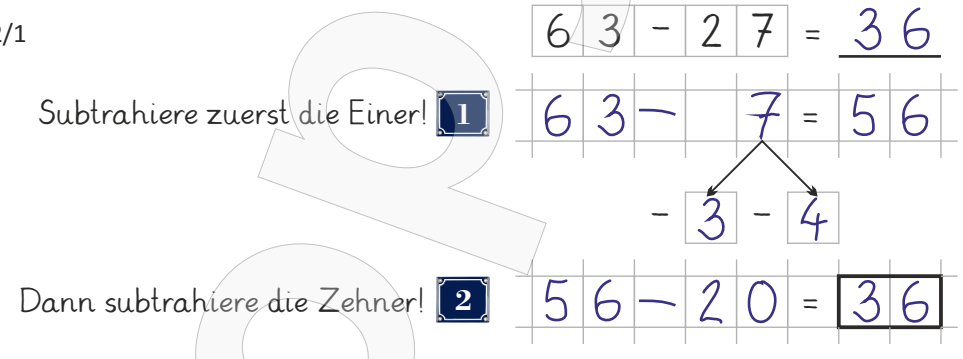
Das bedeutet aber nicht, dass man sie nicht anwenden soll, wenn die Kinder auf der rein symbolischen Ebene noch Probleme mit diesen Aufgaben haben!

10.3 Automatisierungsschritte

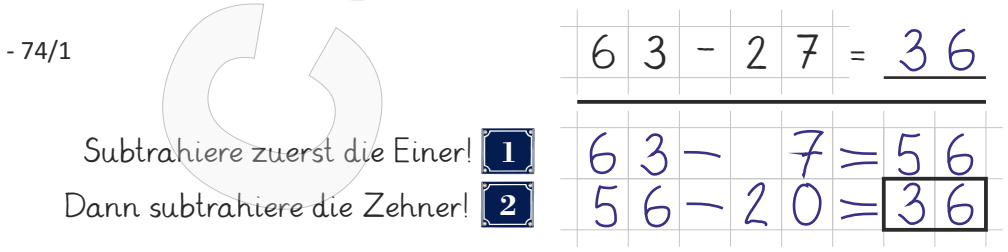
Übungen - 70/1



Übungen - 72/1

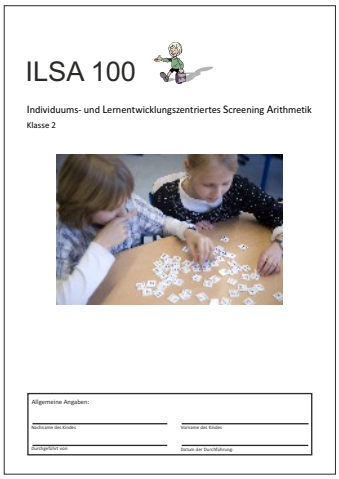


Übungen - 74/1



Copyright

10.4 Kontrollaufgaben im ILSA-Screening 100


ILSA 100

Individuums- und Lernentwicklungszentriertes Screening Arithmetik
Klasse 2

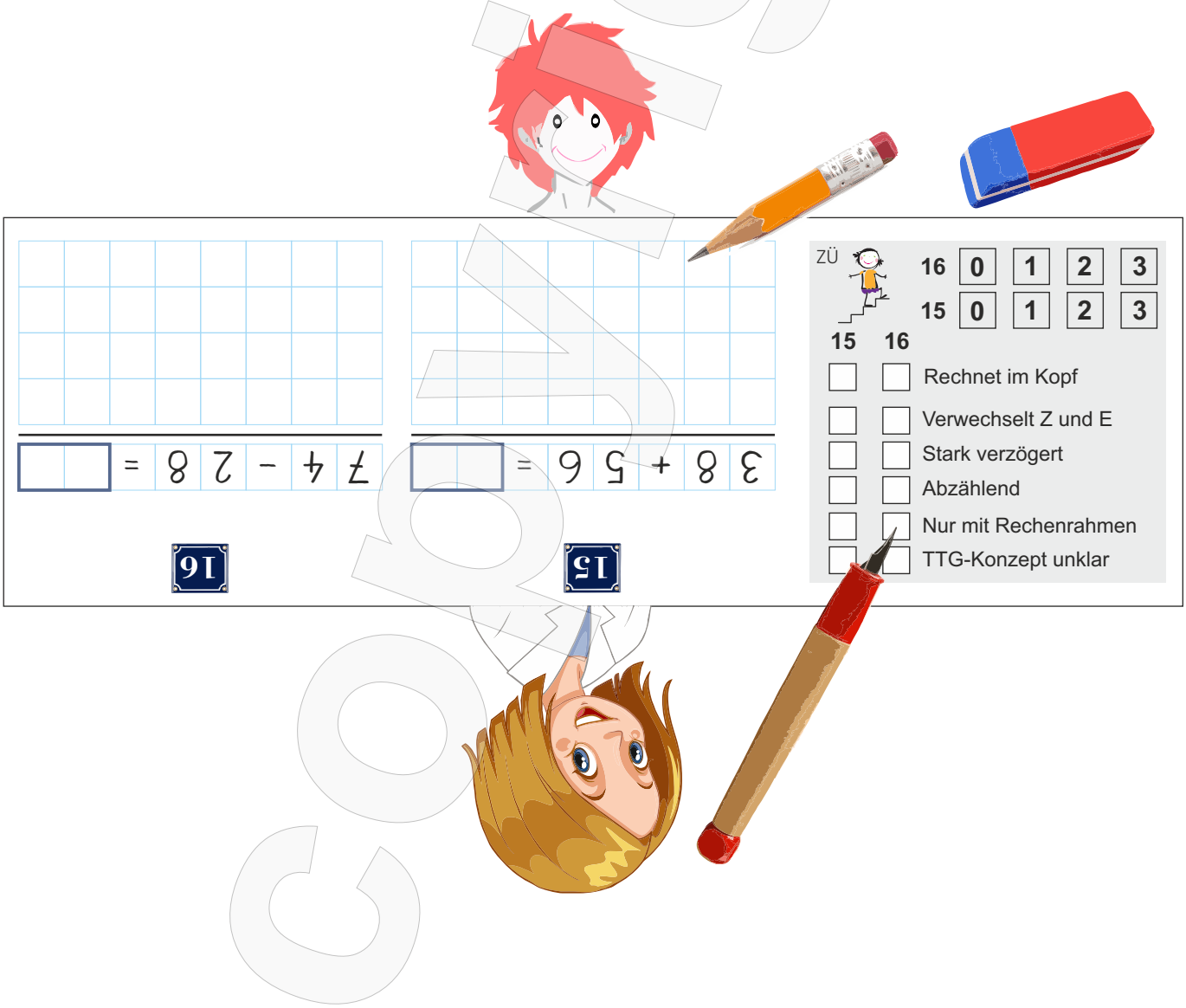
Allgemeine Angaben:

Nachname des Kindes | Vorname des Kindes

Durchgeführt von | Datum der Durchführung

Für jedes der 3 Arbeitshefte finden Sie bei ILSA ein entsprechendes qualitatives Einzel-Screening. Das muss sich natürlich in den Schulalltag integrieren lassen und bearbeitet für jeden Rechenprozess (einstufig, zweistufig ohne ZÜ, zweistufig mit ZÜ und dreistufig mit ZÜ) markante Aufgabenstellungen. Die Aufgaben für den dreistufigen Rechenprozess mit Zehnerübergang sehen Sie unten. Wir haben hier nur zwei stellvertretend ausgesucht.

Die Aufgabenstellung sind natürlich absichtlich auf dem Kopf: Das Kind sitzt Ihnen gegenüber und muss die Aufgabe lesen können und ggf. auch Notizen machen. Sie müssen die Auswertung sehen.



In Weiterleitung des Kapitels 9.4 ergeben sich mit Kindern, die im Zahlenraum bis 100 sicher rechnen können, ungeahnte Perspektiven für das Erlernen des 1x1. Die Tafel 1 zeigt alle 1x1-Aufgaben (incl. Tauschaufgaben). Das sind genau 100 Stück.

Tafel 1

•	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Grün markiert sind in Tafel 2 die Kernaufgaben, die die Kinder zuerst lernen. Bleibt ein Rest von 60 Aufgaben.

Tafel 2

•	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

In Tafel 3 sind weitere Kernaufgaben grün markiert, die durch das Kommutativgesetzt gelöst werden können (also ebenfalls Kernaufgaben sind). Bleibt ein Rest von 36 Aufgaben. Die Sache hat sich also bereits erheblich dezimiert!

Tafel 3

•	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Aufgeschlüsselt auf die verschiedenen Reihen sind das die Aufgaben:

3er-Reihe

3 · 3 = 9
4 · 3 = 12
6 · 3 = 18
7 · 3 = 21
8 · 3 = 24
9 · 3 = 27

4er-Reihe

3 · 4 = 12
4 · 4 = 16
6 · 4 = 24
7 · 4 = 28
8 · 4 = 32
9 · 4 = 36

6er-Reihe

3 · 6 = 18
4 · 6 = 24
6 · 6 = 36
7 · 6 = 42
8 · 6 = 48
9 · 6 = 54

7er-Reihe

3 · 7 = 21
4 · 7 = 28
6 · 7 = 42
7 · 7 = 49
8 · 7 = 56
9 · 7 = 63

8er-Reihe

3 · 8 = 24
4 · 8 = 32
6 · 8 = 48
7 · 8 = 56
8 · 8 = 64
9 · 8 = 72

9er-Reihe

3 · 9 = 27
4 · 9 = 36
6 · 9 = 54
7 · 9 = 63
8 · 9 = 72
9 · 9 = 81

Markieren wir nun die Aufgaben grün, die durch das Kommutativgesetz gelöst werden können:

3er-Reihe	4er-Reihe	6er-Reihe
3 · 3 = 9	3 · 4 = 12	3 · 6 = 18
4 · 3 = 12	4 · 4 = 16	4 · 6 = 24
6 · 3 = 18	6 · 4 = 24	6 · 6 = 36
7 · 3 = 21	7 · 4 = 28	7 · 6 = 42
8 · 3 = 24	8 · 4 = 32	8 · 6 = 48
9 · 3 = 27	9 · 4 = 36	9 · 6 = 54

7er-Reihe	8er-Reihe	9er-Reihe
3 · 7 = 21	3 · 8 = 24	3 · 9 = 27
4 · 7 = 28	4 · 8 = 32	4 · 9 = 36
6 · 7 = 42	6 · 8 = 48	6 · 9 = 54
7 · 7 = 49	7 · 8 = 56	7 · 9 = 63
8 · 7 = 56	8 · 8 = 64	8 · 9 = 72
9 · 7 = 63	9 · 8 = 72	9 · 9 = 81

Von den 36 Aufgaben bleiben nun noch 21 Aufgaben übrig, die durch die Anwendung des Distributivgesetzes gelöst werden oder durch die Nachbaraufgaben, indem man die jeweilige Zahl addiert oder subtrahiert (also z. B. 8 · 3 = 24, dann sind 9 · 3 = 24 + 3 = 27 usw.).

Jetzt kann man zusammen mit den Kindern in der Klasse die Einmaleins-Reihen herleiten. Eine echte Alternative zu ...

... die aber nur dann funktioniert, wenn die Kinder sicher bis 100 rechnen können. Viele Einmaleins-Probleme würden damit verschwinden und auch das völlig stupide Auswendiglernen der Reihen, die immer wieder vergessen werden!

Copyright

Mathekönigin

Christian Bussebaum / Wolfgang Hoffmann

ILSA Lernentwicklung

ILSA 100